Wissenschaftliche Hausarbeit

Historische Integratoren der Firma A. Ott

– Anschauliche Darstellung der Funktionsweise und Animation

von Michael Palm

WS 2013/14

Wissenschaftliche Hausarbeit für das Lehramt an Gymnasien, eingereicht der Prüfungsstelle Darmstadt des Landesschulamtes

Thema:
Historische Integratoren der Firma A. Ott - Anschauliche Darstellung der Funktionsweise und Animation

Bereich, aus dem die Hausarbeit geschrieben wurde (Fach):
Mathematik

Name des Verfassers:

Michael Palm

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1
2. Begriffe: Vom Planimeter zum Integraph 4
3. Die Maschinen 6

3.1. Vorwort 6

3.2. Messrollen-Technik 8

3.2.1. Begriffe 8

3.2.2. Die Messrolle ablesen 9

3.2.3. Theoretische Betrachtungen der Messrolle 11

3.2.3.1. Gradlinige Bewegung in Messrollenrichtung 11

3.2.3.2. Gradlinige Bewegung senkrecht zur Messrollenrichtung 11

3.2.3.3. Gradlinige Bewegung schräg zur Messrollenrichtung 11

3.3. Grund- und Quadrat-Linearplanimeter 14

3.3.1. Zweck 14

3.3.2. Aufbau 16

3.3.3. Anwendung 18

3.3.4. Wirkweise 19

3.3.4.1. Grund-Linearplanimeter 22

3.3.4.2. Quadrat-Linearplanimeter 32

3.4. Integrimeter 36

3.4.1. Zweck 36

3.4.2. Aufbau 37

3.4.3. Anwendung 38

3.4.4. Wirkweise 39

3.5. Polarplanimeter 41

3.5.1. Zweck, Aufbau und Anwendung 41

3.5.2. Wirkweise 42

3.6. Linear-Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung 46
3.6.1. Zweck 46
3.6.2. Aufbau 47
3.6.3. Anwendung 47
3.6.4. Wirkweise 48
3.6.4.1. Momentplanimeter von Lorenz 49
3.6.4.2. Potenzplanimeter mit Nockensteuerung..... 51
3.6.4.3. Linear-Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung 53
3.7. Stieltjes-Planimeter 58
3.7.1. Zweck 58
3.7.2. Aufbau 59
3.7.3. Anwendung 62
3.7.4. Wirkweise 66
3.8. Harmonischer Analysator 70
3.8.1. Zweck 70
3.8.2. Aufbau 73
3.8.3. Anwendung 74
3.8.4. Wirkweise 76
3.9. Harmonischer Doppelanalysator 80
3.10. Integraph 81
3.10.1. Zweck 81
3.10.2. Aufbau 82
3.10.3. Anwendung 84
3.10.4. Wirkweise 85
4. Historisches zu den Maschinen und der TH Darmstadt 86
5. Abbildungsverzeichnis 91
6. Literaturverzeichnis 92
7. Anhang 92

Danksagung

Ich danke

Prof. Dr. Martin Kiehl,

der diese Arbeit betreut hat und mir mit wertvollen Ratschlägen zur Seite stand;
Der

Firma A. Ott, Kempten,

die mir das Jahrbuch »125 Jahre Ott«, mit vielen interessanten Informationen und Geräteanleitungen zugeschickt haben und mich an Prof. Dr. Joachim Fischer und seine Texte verwiesen haben;

meiner Lebensgefährtin Anne

sowie

meinen Schwiegereltern,

die den ganzen Entstehungsprozess der Arbeit mit begleitet und mir durch Motivationskrisen geholfen haben.

1. Einleitung

In dieser Arbeit geht es um acht historische, mathematische Messinstrumente aus der Fertigung der Firma A. Ott in Kempten, die aus den Zeiten des beginnenden 20. Jahrhunderts stammen und die sich heute in der Sammlung der AG Numerik an der Technischen Universität Darmstadt (TU Darmstadt) befinden. Es handelt sich um Geräte, die auf mechanische Weise Integrationen durchführen können, so genannte *Integratoren*. Teils bestimmen sie Flächen, teils Momente, teils zeichnen sie Stammfunktionen zu einer gegebenen Kurve[1].

Die Maschinen üben einen besonderen Reiz auf den Betrachter aus, weil sie einerseits Zeugnis einer anderen Zeit, vor der Verbreitung der Digital-Technik, sind und weil sie andererseits ein einzigartiges, filigranes Aussehen haben, dass, weil sich die Wirkweise nicht direkt erschließt, zum Anfassen und Ausprobieren einlädt. Es ist denkbar, diese natürliche Motivation, die von den Maschinen ausgeht, didaktisch nutzbar zu machen, um Mathematik zu erklären oder auf sie neugierig zu machen. Außerdem demonstrieren die Maschinen die Bedeutung der zugrunde liegenden mathematischen Begriffe und Theoremen durch ihre bloße Existenz und ihren komplexen Aufbau, denn sie zeigen, dass es Menschen viel Zeit und Geld wert war, diese Maschinen zu konstruieren, weil sie dieselben mathematischen Berechnungen immer und immer wieder durchführen mussten und wichtige Dinge von diesen Berechnungen abhingen. Nicht zuletzt ermöglichen die Geräte auch ein besseres Verständnis von einer anderen Zeit und dem Mühsal, mit dem früher mathematische Berechnungen verbunden waren.

Vor Bestehen dieser Arbeit war zu vielen der Maschinen nicht klar, welchem Zweck sie dienen, wie sie heißen, wie sie aufzubauen und zu benutzen sind. Es war auch nicht klar, ob die Geräte vollständig sind oder ob es Anleitungen zu ihnen gibt.

Ziel der Arbeit war es deshalb zunächst die Geräte zu identifizieren und nach Anleitungen zu suchen, wie die Geräte zu bedienen sind und wie sie funktionieren. Zum Teil war die Identifizierung nur anhand des Aussehens der Maschinen möglich, weil entweder kein Name vorlag oder der Name in der ein-

[1] Die genaue Aufzählung der Geräte ist dem Inhaltsverzeichnis zu entnehmen.

schlägigen Literatur nicht zu finden war. In der Literatur zu diesem Thema fanden sich auch nur wenige Gebrauchsanweisungen; dafür gab es zu jedem Gerät eine Erklärung der Funktionsweise. Da die Literatur zu den Maschinen jedoch meist über 50 Jahre alt war und viele Maschinen auf einmal abhandelte, um einen Überblick zu geben, fielen auch die Erklärungen zu der Funktionsweise sehr konzentriert aus, und bedurften einiger Einarbeitung. Darüber hinaus war vor 50 Jahren der Grenzwertbegriff von Cauchy und Weierstraß noch nicht weit verbreitet, so dass die Beweise mit dem Leibniz'schen Differentialbegriff geführt wurden, von dem wir heute wissen, dass er nicht exakt ist und der den meisten Menschen heute gar nicht mehr vertraut ist.

Die Arbeit sollte also noch vorhandenes Wissen über diese Maschinen sammeln und aufarbeiten. Mein Anspruch war es möglichst einfache Beweise zu finden, in die man sich einfach einlesen kann, sie mit vielen Bildern zu verdeutlichen und den modernen Grenzwertbegriff von Cauchy und Weierstraß zu verwenden[2].

Zu einem Gerät habe ich darüber hinaus einen Film produziert, der die Bewegungsabläufe, den Zweck, Aufbau und die Wirkweise eines der Geräte zeigt. Der Film findet sich im Anhang dieser Arbeit. Er ist ein Beispiel dafür, welchen didaktischen Mehrwert eine filmische Verarbeitung der Maschinen im Vergleich zur bloßen Textanleitung gibt und kann als Anregung dienen, Videos zu weiteren Maschinen aufzunehmen. Auf Grundlage meiner Arbeit kann nun eine Ausstellung der Geräte oder eine ausführlichere didaktische oder auch eine historische Arbeit entstehen.

Zu den einzelnen Kapiteln:

In Kapitel 2 geht es zunächst um die Namen der Geräte. Es wird erläutert, wonach die Geräte benannt sind, was man von ihren Namen ableiten kann und in welchen Kategorien sie einzuordnen sind.

Die Maschinen werden in Kapitel 3 erläutert. Es gibt zu jeder Maschine Fotos, schematische Skizzen, sowie Ausführungen darüber, wozu die Maschine genutzt wurde (*Zweck*), wie sie aufgebaut ist (*Aufbau*), wie sie anzuwenden ist (*Anwendung*) und wie sie funktioniert (*Wirkweise*).

[2] Zum Teil habe ich die Beweise auch selbst geführt oder stark überarbeitet. Andere habe ich nur neu bebildert und formuliert.

Dem 3. Kapitel sind zwei Unterkapitel, »Vorwort« und »Messrollen-Technik«, vorangestellt.

Im Vorwort wird zusammengefasst, welche der Unterkapitel des 3. Kapitels »Die Maschinen« man losgelöst von dem Rest der Arbeit lesen und verstehen kann oder welche Kapitel aufeinander aufbauen. Eine Lektüre des Vorwortes ist dann wichtig, wenn man sich nur für bestimmte Maschinen interessiert und wissen will, welchen Teil der Arbeit man überspringen kann und welchen nicht.

In »Messrollen-Technik« geht es nicht um eine Maschine selbst, sondern um eine Technik, die sehr viele der Maschinen nutzen – nämlich die der Messrolle. Es wird erklärt, wie sich die Messrolle bei bestimmten Bewegungen verhält (eine wichtige Voraussetzung für das Verständnis einiger Maschinen (vgl. »Vorwort«)), und das richtige Ablesen und Interpretieren der Messrolle wird vorgeführt. Im Anschluss an dieses Kapitel werden die Maschinen selbst beschrieben.

Dem schließt sich das Kapitel »Historisches zu den Maschinen und der TH Darmstadt« an. Viele der Maschinen, um die es in dieser Arbeit geht, haben eine gemeinsame Geschichte mit der TU Darmstadt (ehem. TH Darmstadt) und sind dort entwickelt oder wenigstens weiterentwickelt worden. In diesem Kapitel geht es darum, welche Maschinen das betrifft, wer sie entwickelt hat und wie die Beziehung zwischen der Firma A. Ott und der TH Darmstadt war.

2. Begriffe: Vom Planimeter zum Integraph

Unter dem Begriff **Integrator** werden alle Geräte zusammengefasst, die mechanisch Integrationen durchführen. Die Gruppe dieser Geräte lässt sich einteilen in **Planimeter** (*Integralmesser*) und **Integraphen** (*Integralzeichner*), d.h. Geräte die zu einer gegebenen Kurve ein *Integral bestimmen* bzw. *messen* oder ein *Integral zeichnen*[3]. Neuere Planimeter sind so konstruiert, dass man mit ihnen eine gegebene Kurve abfährt und anschließend an einer Messrolle oder einer anderen Anzeigevorrichtung den Integral-Wert bis auf die Multiplikation mit einer Konstanten ablesen kann. Diese Geräte, die in der Vergangenheit noch **Umfahrungsplanimeter** genannt wurden, verdrängten immer mehr Geräte mit anderer Funktionsweise wie z.B. das Auszählen von Quadraten oder das Messen von Parallelstreifen[4]. Heute sind deshalb allgemein meist Umfahrungsplanimeter gemeint, wenn man von Planimetern spricht.

Alle Planimeter, die in dieser Arbeit beschrieben werden, haben Gemeinsamkeiten in ihrem Aufbau. Sie besitzen einen Fahrarm, der eine gegebene Kurve befährt und an dem eine Messrolle befestigt ist, die das integral bestimmt. Das andere Ende des Fahrarms bewegt sich auf einer Geraden (auf der es z.B. durch einen Wagen in einer Schiene geführt wird), auf einem Kreis (auf dem es z.B. durch durch einen weiteren Arm geführt wird) oder einer anderen Kurve. Je nachdem auf welcher Kurve sich der Fahrarm bewegt, wird das Gerät benannt. Bewegt sich der Arm auf einer Geraden, spricht man von einem **Linearplanimeter**; bewegt es sich auf einem Kreis, spricht man von einem **Polarplanimeter**. In Kapitel 3.5 nennen wir ganz allgemein ein Planimeter, dass sich auf einer stückweise glatten und stetigen Kurve bewegt ein **allgemeines Umfahrungsplanimeter**, obwohl es Umfahrungsplanimeter gibt, die sich nicht auf diese Weise kategorisieren lassen. Damit folge ich der Notation von Willers,

[3] Diese Unterteilung und auch die folgenden Begriffe sind gut zu entnehmen aus der Arbeit von Meyer zur Cappelen, W.: Mathematische Instrumente. 3. Auflage. Leipzig: Geest & Portig K.-G., 1949 (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe B, Band 1), S. 179ff.

[4] Vgl. Willers, FR. A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin: Akademie Verlag, 1951, S. 118ff,125.

der ebenfalls allgemein von einer Umfahrungsplanimeter-Theorie und in diesem Kontext von einer allgemeinen Planimetergleichung spricht[5].

Neben der bereits angeführten Benennung von Planimetern aufgrund von Spezifika im Aufbau tragen Planimeter oft den Namen des Erfinders und / oder des Erbauers im Namen und einen Hinweis, welche Integrale durch das Gerät bestimmt werden können.

Planimeter, die ein Integral $\int y(x)\, dx$ bestimmen, werden **Grundplanimeter** oder **Planimeter 1. Ordnung** genannt. Analog werden Planimeter, die das Integral $\int y(x)^2 dx$ bestimmen **Quadratplanimeter** oder **Planimeter 2. Ordnung** genannt. Allgemein nennt man Planimeter, die Integrale der Form $\int y(x)^n\, dx\, , n \in \mathbb{N}$ bestimmen, **Potenzplanimeter**.

Auf diese Weise können Wortkombinationen entstehen, wie **Quadrat-Linearplanimeter Adler-Ott**. Die Bezeichnung des Geräts ergibt sich daraus, dass das Gerät auf einer Schiene läuft, ein Integral der Form $\int y(x)^2 dx$ bestimmt, von Heinz Adler erfunden und von der Firma A. Ott konstruiert wurde.

[5] Vgl. Willers (1951), S. 125ff.

3. Die Maschinen

3.1. Vorwort

Im Folgenden werden sieben Maschinen vorgestellt, die sich in der Sammlung der AG Numerik an der Technischen Universität Darmstadt befinden. Darüber hinaus befindet sich in der Sammlung ein Harmonischer Doppelanalysator, der in Kapitel 3.8 »Harmonischer Analysator« kurz angerissen wird. Zu jeder Maschine wird jeweils der *Zweck* und der *Aufbau* beschrieben, eine kurze Anleitung gegeben, wie die Geräte zu bedienen sind (*Anwendung*) und die Funktionsweise (*Wirkweise*) der Maschinen erläutert.
Vor die Ausführungen zu den Maschinen ist noch ein Kapitel über die Messrollen-Technik voran gestellt, welche die meisten Maschinen benutzen.
Die Ausführungen zur Funktionsweise bauen teils aufeinander auf, teils ergänzen sie einander. Deshalb scheint es sinnvoll für Leser, die nur Teile der Arbeit lesen wollen, kurz zu beschreiben, welche Kapitel unabhängig voneinander gelesen werden können und welche nicht. Das kombinierte Grund- und Quadrat-Linearplanimeter wird dabei in zwei separate Geräte aufgeteilt (das Grund-Linearplanimeter und das Quadrat-Linearplanimeter) und auch separat aufgeführt, da sie in den Erklärungen zu der Wirkweise auch als separate Maschinen erklärt werden und oft nur Wissen über das Grund-Linearplanimeter wichtig ist.

Kapitel 3.2 – Messrollen-Technik
Voraussetzungen: Keine.

Kapitel 3.3.4.1 – Grund-Linearplanimeter
Die Theorie des Grund-Linearplanimeters wird in Kapitel 3.5.4 »Polarplanimeter« zur allgemeinen Umfahrungsplanimeter-Theorie ausgebaut.
Voraussetzungen: Kapitel 3.2 »Messrollen-Technik«.

Kapitel 3.3.4.2 – Quadrat-Linearplanimeter
Voraussetzungen: Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«.

Kapitel 3.4.4 – Integrimeter

Voraussetzungen: Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«.

Kapitel 3.5.4 – Polarplanimeter

In diesem Kapitel wird die Linearplanimeter-Theorie zu einer allgemeinen Umfahrungsplanimeter-Theorie ausgebaut.

Voraussetzungen: Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«.

Kapitel 3.6.4 – Linear-Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung

Voraussetzungen: Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«.

Kapitel 3.7.4 – Stieltjes-Planimeter

Ein Teil des Stieltjes-Planimeters ist ein Polarplanimeter. Dieses wird nicht weiter erklärt und vorausgesetzt. Wer ein vollständiges Verständnis des Geräts anstrebt sollte daher darüber hinaus die Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter« und 3.5.4 »Polarplanimeter« lesen. Für ein grundsätzliches Verständnis dessen, was das Gerät auszeichnet, ist eine Kenntnis der Kapitel jedoch nicht nötig.

Voraussetzungen: Keine. Bei näherem Interesse Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter« und Kapitel 3.5.4 »Polarplanimeter«.

Kapitel 3.8 – Harmonischer Analysator

Eine Abwandlung des Stieltjes-Planimeters. Es gibt häufig Vergleiche und Querverweise auf die Funktionsweise des Stieltjes-Planimeters.

Voraussetzungen: Kapitel 3.7 »Stieltjes-Planimeter«. Bei näherem Interesse Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter« und Kapitel 3.5.4 »Polarplanimeter«.

Kapitel 3.8.5 – Harmonischer Doppelanalysator

Voraussetzungen: Kapitel 3.8 »Harmonischer Analysator«.

Kapitel 3.9.4 –Integraph

Voraussetzungen: Keine.

3.2. Messrollen-Technik

Hier soll kurz auf die Messrollen-Technik eingegangen werden, die von den Geräten genutzt wird[6]. Es werden wichtige Begriffe erläutert, es wird erklärt, wie die Messrollen abzulesen sind und wie sich der Wert auf einer Messrolle ändert, wenn man die Rolle an einer bestimmten Kurve entlang zieht.

3.2.1. Begriffe

Wenn man eine Messrolle über einen Blatt Papier oder einen anderen Untergrund zieht, dreht sich dabei in der Regel die Messrolle. Wie weit bzw. wie oft sich die Rolle dabei dreht, nennt man die **Messrollenabwicklung**. Dem liegt die Vorstellung einer Rolle mit Schnur zugrunde, die über den Boden gerollt wird und die sich dabei abwickelt, während man das Ende der Schnur festhält. Die Länge der abgewickelten Schnur würde genau der Messrollenabwicklung entsprechen. Die Beschriftung bzw. Skalierung auf der Messrolle nennt man **Nonius**. Einen Teil dieser Skalierung (in der Regel der Abstand von einem Strich der kleinsten Einheit zum nächsten) nennt man ein **Noniusteil**. Die Skala in Noniusteilen entspricht gewöhnlich nicht dem metrischen System. Um die Messrollenabwicklung in Zentimetern zu erhalten muss man die Anzeige in Noniusteilen zunächst in Zentimeter umrechnen.
Die **Messrollenrichtung** ist die Richtung, in welche die Messrolle zeigt und in welche sie Rollt. Bei dem Bild mit der Schnur, das wir zur Erklärung der Messrollenabwicklung herangezogen haben, entspricht sie der Richtung, in der die Schnur-Rolle gerollt wurde.
Die **Rollachse** ist dagegen die Achse, um die sich die Rolle dreht. Sie steht senkrecht zur Messrollenrichtung.

[6] Vgl. auch die Ausführungen von Willers (1951), S. 129ff.

3.2.2. Die Messrolle ablesen

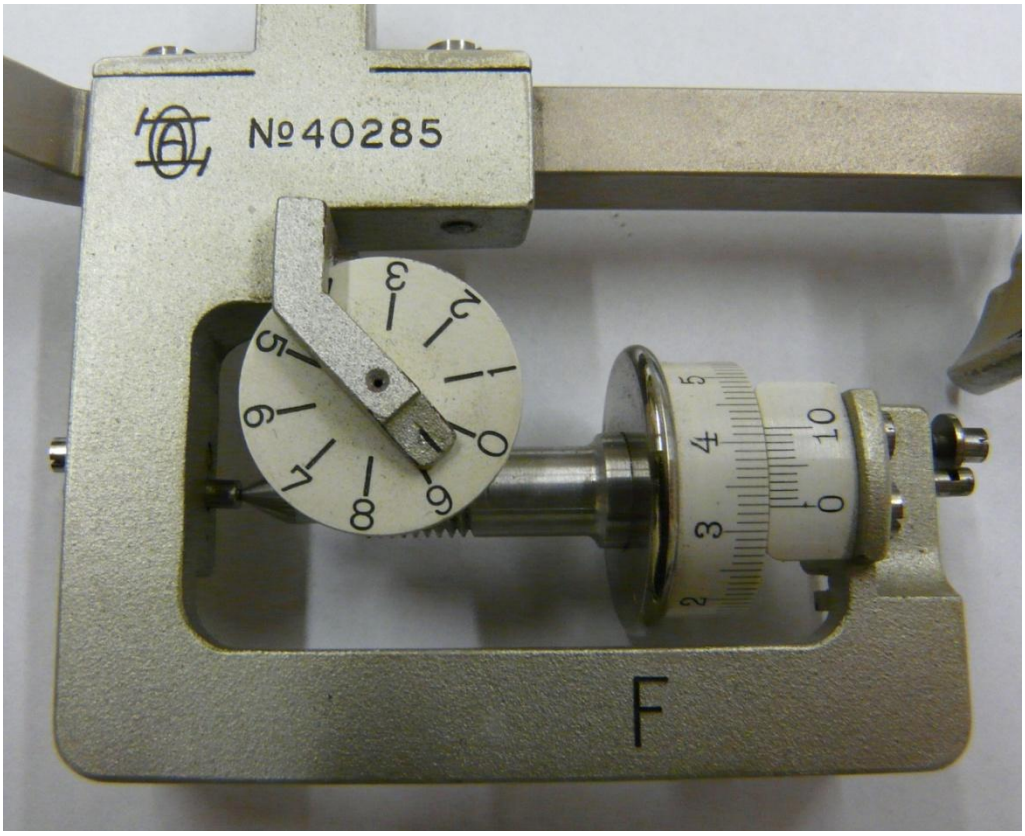

Bild 1: Eine Messrolle mit einem Noniuswert von 933.

Alle Geräte, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, verfügen über eine Messrolle, wie in Bild 1 abgebildet. Die Rollen haben fast immer einen Durchmesser von 2 cm[7]. Daraus folgt ein Rollenumfang von 2π. Der Rollenumfang der Rolle, die auf dem Papier läuft, wird dabei auf der Rolle gleichmäßig in 100 Noniusteile aufgeteilt, die jeweils in Zehnerschritten durch eine Zahl von 0 bis 9 beschriftet sind. Ein Noniusteil entspricht also $\frac{2\pi}{100} = \frac{1}{50}\pi = 0{,}06283 \ldots$ cm. Fünf Millimeter entsprechen also ungefähr acht Noniusteilen.

Die Messrollenabwicklung überträgt sich durch ein Zahnradgetriebe auf eine zweite Rolle mit Skala von 0 bis 9. Die Übersetzung der Zahnräder ist dabei von der Art, dass sich die Rolle, die auf dem Untergrund rollt genau zehnmal drehen muss, damit sich die Rolle mit der Beschriftung 0 bis 9, die durch das Zahnradgetriebe in Bewegung gesetzt wird, einmal dreht.

[7] Die einzige Ausnahme bildet das Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung. Hier variiert der Durchmesser.

Man kann die Messrollenabwicklung in Noniusteilen also in Hunderter-Zahlen direkt am Gerät ablesen.

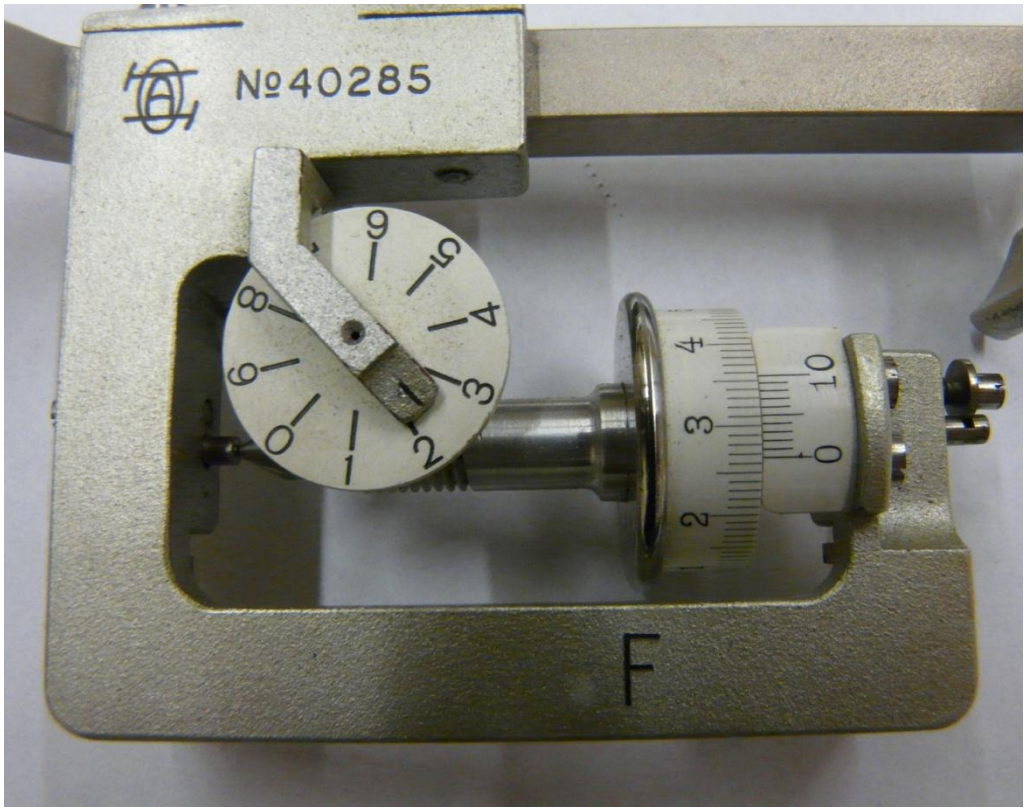

Bild 2: Eine Messrolle mit einem Noniuswert von 227.

Der Wert dieser Messrolle beträgt 227 Noniusteile. Der Wert der Messrolle in Bild 1 beträgt 933 Noniusteile. Bezeichnet Bild 1 den Ausgangszustand, auf den eine Bewegung der Messrolle gefolgt ist, und Bild 2 den Endzustand dieser Bewegung, dann beträgt die Messrollenabwicklung dieser Bewegung $1227 - 933$ Noniusteile $= 294$ Noniusteile $\approx 18{,}47$ cm. Die »1« muss dem Noniuswert aus Bild 2 voran gestellt werden, weil die Messrolle, welche die Hunderterschritte misst die »0« überschritten hat.

3.2.3. Theoretische Betrachtung der Messrollen-abwicklung

Nun wollen wir der Frage nachgehen, wie stark sich die Messrolle abrollt, wenn man sie in einer bestimmten Richtung über das Blatt zieht.
Wir betrachten folgende Bewegungen:

3.2.3.1. Gradlinige Bewegung in Messrollenrichtung

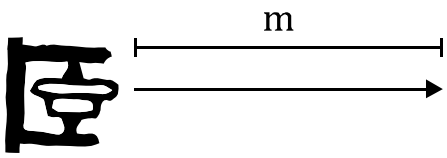

Bild 3: Die Messrolle wird um m cm in Messrollenrichtung gezogen.

Bei dieser Bewegung überträgt sich jeder Teil der Bewegung auf die Messrolle und die Messrollenabwicklung beträgt m cm.

3.2.3.2. Gradlinige Bewegung senkrecht zur Messrollenrichtung

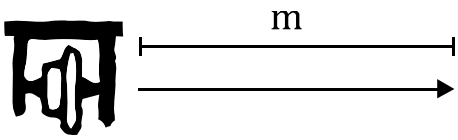

Bild 4: Die Messrolle wird um m cm senkrecht zu der Messrollenrichung, in Richtung der Rollachse gezogen.

Bei dieser Bewegung überträgt sich kein Teil der Bewegung auf die Messrolle; Die Messrolle dreht sich nicht und gleitet oder hüpft (in kleinen Schritten) über das Blatt.

3.2.3.3. Gradlinige Bewegung schräg zur Messrollenrichtung

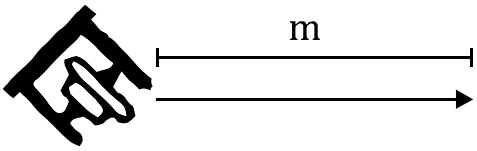

Bild 5: Die Messrolle wird um m cm schräg zu der Messrollenrichung gezogen.

Wir werden gleich beweisen, dass sich die Messrolle in diesem Fall um $m \cdot \cos(\alpha)$ abwickelt, wobei α der Winkel zwischen der Messrollenrichtung

und der Richtung ist, in welche die Messrolle gezogen wird. Drückt man die Bewegung mit welcher die Messrolle gezogen wird, als Vektor aus, dann kann man diesen Vektor als Summe zweier anderer Vektoren darstellen, von denen einer in Messrollenrichtung verläuft und der andere senkrecht dazu. In diesem Fall entspricht die Messrollenabwicklung gerade der Länge des Vektors in Messrollenrichtung.

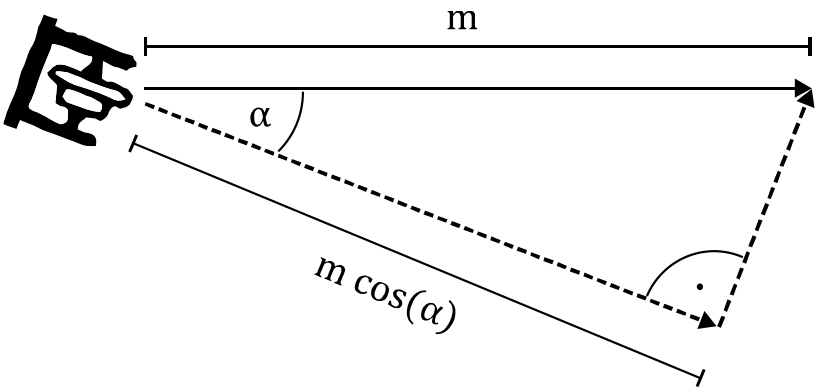

Bild 6: Darstellung der Bewegung als Summe von Bewegungen in Messrollenrichtung und Bewegungen senkrecht dazu.

<u>Beweis</u>:

Wir betrachten zunächst nicht die gradlinige Bewegung selbst, sondern ersetzen die Bewegung durch eine Zickzack-Bewegung in Messrollenrichtung und senkrecht dazu:

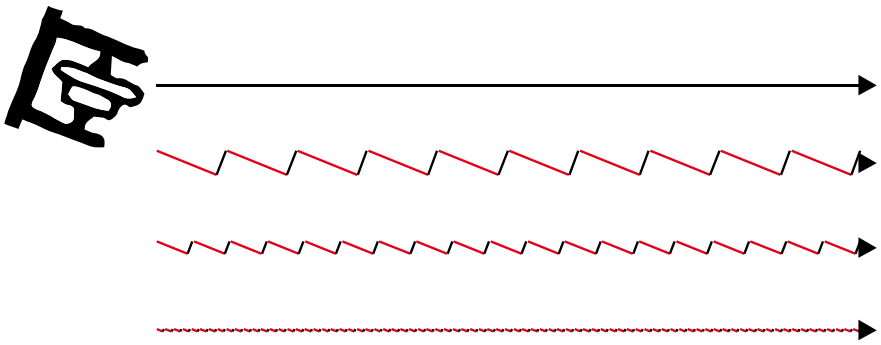

Bild 7: Annäherung der gradlinigen Bewegung durch Zickzack-Bewegungen in Messrollenrichtung und senkrecht dazu. Bewegungen in Messrollenrichtung sind rot eingezeichnet.

Bei dieser Bewegung lässt sich die Messrollenabwicklung bestimmen: Sie beträgt die Summe der Längen der rot eingezeichneten Strecken in Messrollenrichtung. Bei der obersten Annäherung in Bild 7 gibt es 10 Zacken und damit 10 rote Strecken. Eine der roten Strecken hat eine Länge von $\frac{m}{10} \cdot \cos(\alpha)$ cm. Alle rote Strecken aneinandergereiht haben also eine Läge von

$m \cdot \frac{m}{10} \cdot \cos(\alpha) = m \cdot \cos(\alpha)$ cm. Allgemein führt eine Annäherung mit n Zacken auf n rote Strecken der Länge $\frac{m}{n} \cdot \cos(\alpha)$ cm, was eine Messrollenabwicklung von $n \cdot \frac{m}{n} \cdot \cos(\alpha) = m \cdot \cos(\alpha)$ cm ergibt.

Es ist also egal, wie sehr man die gradlinige Bewegung durch Zickzack-Bewegungen annähert, die Messrollenabwicklung ist $m \cdot \cos(\alpha)$. Im Grenzwert dieses Prozesses kann man die Zickzack-Bewegungen nicht mehr von der gradlinigen Bewegung unterscheiden.

q.e.d.

Im Übrigen ist es egal, ob die Messrollenrichtung im positiven oder im negativen Sinne um α von der Richtung bweicht, in welche die Messrolle gezogen wird. Das rechtwinklige Dreieck und damit auch die Messrollenabwicklung bleiben gleich (vgl. Bild 8).

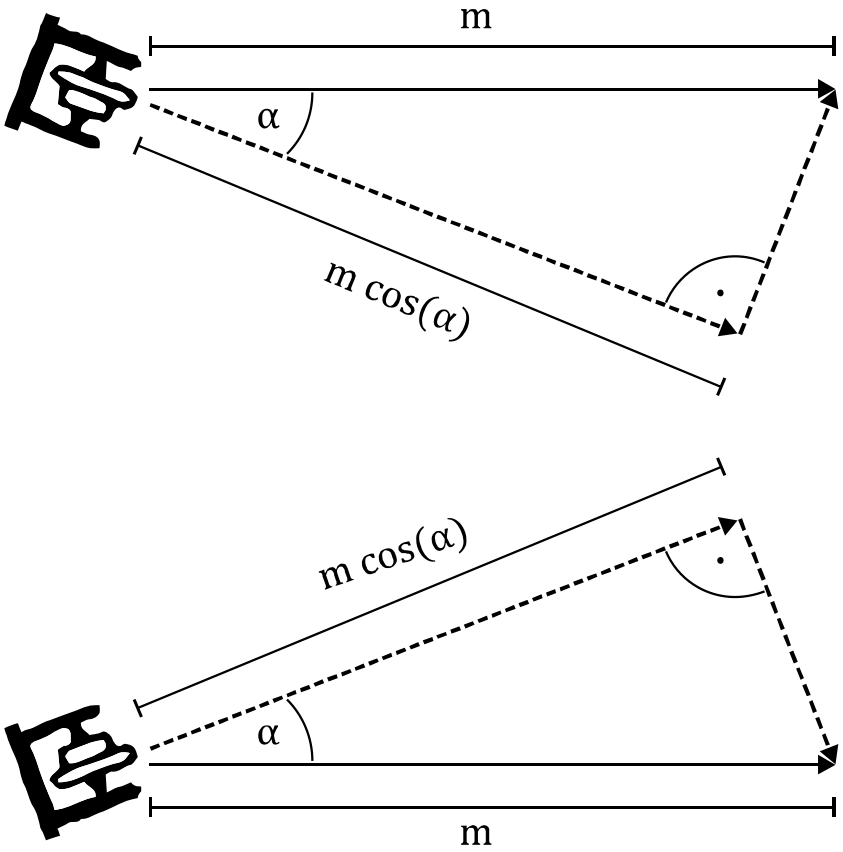

Bild 8: Symmetrie des Winkels bezüglich der Bewegungsrichtung.

3.3. (Grund- & Quadrat-)Linearplanimeter

3.3.1. Zweck

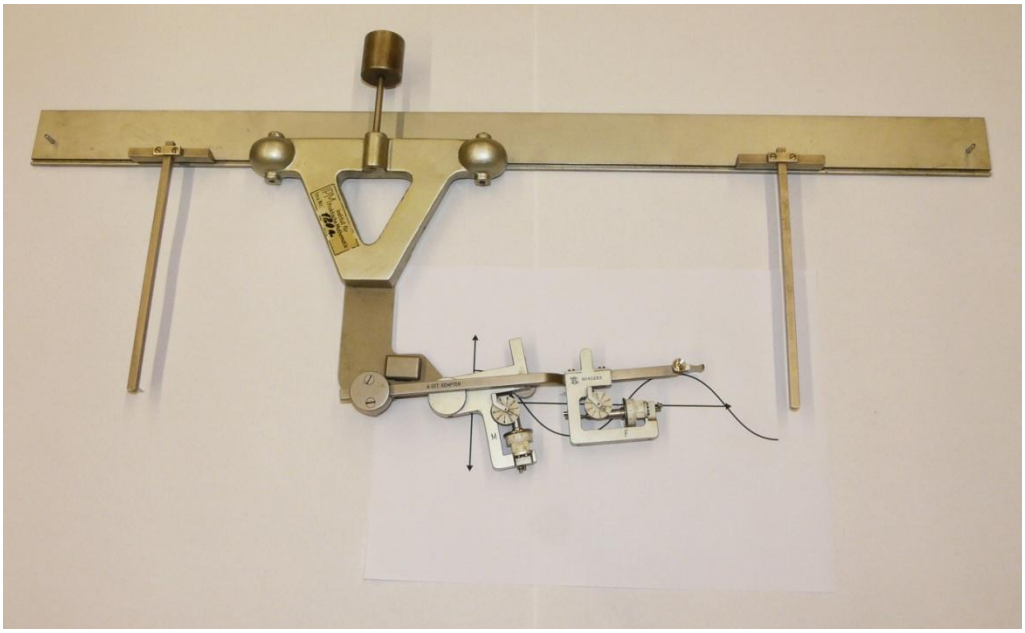

Bild 9: (Grund- & Quadrat-)Linearplanimeter. Rechts und links von dem Gerät befinden sich die Distanzstäbe, mit denen man die Zeichnung ausrichten kann.

Das Grund- & Quadrat-Linearplanimeter ist eine Kombination aus zwei ursprünglich separaten Geräten: Einem Grundplanimeter und einem Quadratplanimeter.

Ein Grundplanimeter kann Flächen bestimmen, die sich durch eine geschlossene, stetige Kurve begrenzen lassen, indem die Kurve mit dem Gerät abgefahren wird. Der Graph der Kurve muss als Zeichnung vorliegen.

Das Quadratplanimeter kann zu derselben Kurve und einem x-y-Koordinatensystem durch Umfahren der Kurve das Integral $\int y^2 dx$ bestimmen[8].

Das Grund- & Quadrat-Linearplanimeter vereint diese beiden Geräte: Die Kurve muss nur ein einziges Mal abgefahren werden und es wird sowohl die Fläche, als auch das Integral bestimmt.

[8] Teilt man die geschlossene Kurve in zwei Funktionsgraphen von Funktionen f und g auf, die in dem Koordinatensystem übereinander liegen und in den Endpunkten ineinander übergehen, dann bestimmt das Gerät das Integral $\int y^2 dx = \int f(x)^2 - g(x)^2 dx$.

Die Bestimmung des Integrals $\int y^2 dx$ ist deshalb so interessant, weil damit leicht der Schwerpunkt der Fläche bestimmt werden kann. Der Schwerpunkt $S = (s_x, s_y)$ einer Fläche liegt bei den Koordinaten

$$s_x = \frac{1}{A}\iint y\,dx\,dy = \frac{1}{A}\iint y\,dy\,dx = \frac{1}{2A}\int y^2 dx,$$

$$s_y = \frac{1}{A}\iint x\,dy\,dx = \frac{1}{A}\iint x\,dx\,dy = \frac{1}{2A}\int x^2 dy,$$

wobei A den Flächeninhalt der Fläche bezeichnet. Gerade der Flächeninhalt A und das Integral $\int y^2 dx$ bzw. $\int x^2 dy$ werden aber von dem Gerät bestimmt.
So kann mit dem Gerät durch einfaches Umfahren des Flächenrands die x-Koordinate bestimmen, wenn die Maschine an der x-Achse ausgerichtet ist. Will man die y-Koordinate des Schwerpunks berechnen, muss man die Maschine nur an der y-Achse ausrichten (dadurch wird das Koordinatensystem um 90° gekippt).

Auch das Volumen von Rotationskörpern lässt sich anhand einer Zeichnung des Graphen der zu rotierenden Funktion mit dem Gerät leicht bestimmen.
Das Volumen bestimmt sich nach der Formel

$$\pi \int y^2 dx.$$

Außerdem eignet sich das kombinierte Grund- und Quadrat-Linearplanimeter, um in Diagrammen, bei denen die y-Achse quadratisch skaliert ist, Flächeninhalte zu bestimmen.

Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die Bestimmung des Erwartungswerts oder des Effektivwerts zu einer gegebenen Dichte.
Der Erwartungswert bestimmt sich nach

$$\int x \cdot y(x)\,dx = \iint x\,dy\,dx = \iint y\,dx\,dy = \int x^2 dy.$$

Der Effektivwert bestimmt sich nach

$$\int y^2 dx.$$

3.3.2. Aufbau

Hinweis: Hier und auch im Folgenden in dem Kapitel 3.3 stellen die Skizzen das Gerät um 180° gedreht dar. Das geschieht aus didaktischen Erwägungen, weil der Leser in der Regel gewohnt ist Funktionen oberhalb der Abszisse zu zeichnen (vgl. Bilder 9, 10 und 11).

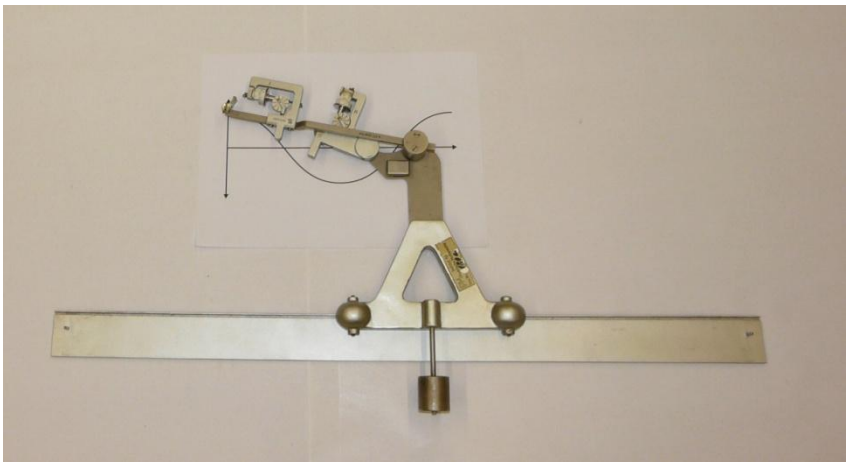

Bild 10: Kombiniertes Grund- und Quadrat-Linearplanimeter. Um 180° gedreht.

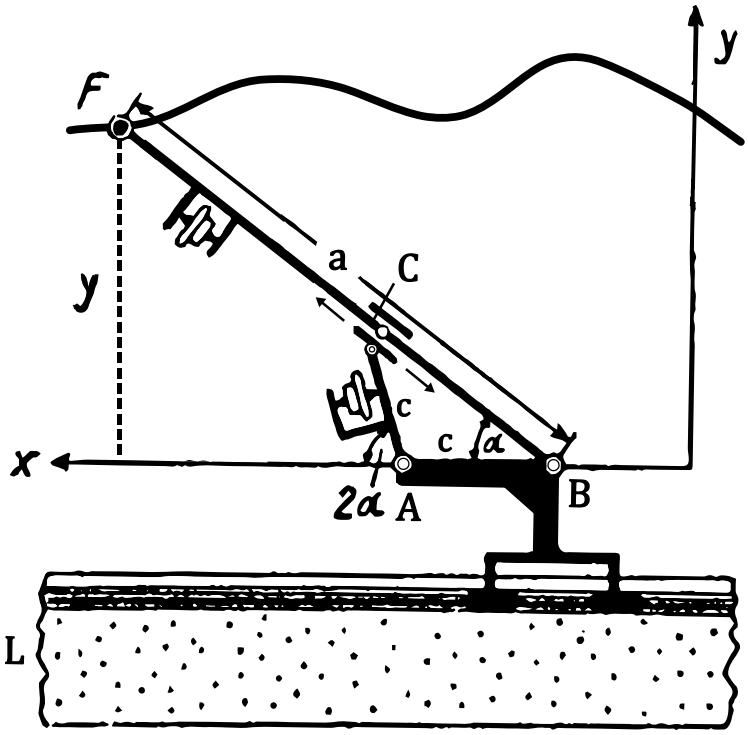

Bild 11: Kombiniertes Grund- und Quadrat-Linearplanimeter. Hinweis: Der Fahrarm BF befindet sich über dem kleinen Arm AC (vgl. Bild 9) und kann sich auch über diesen hinweg unter die x-Achse, fast bis zur Leitschiene L bewegen. In Wirklichkeit ist der Abstand zwischen Leitschiene und x-Achse deutlich größer, so, dass sich hier viel Spielraum ergibt. Der kleine Arm AC, der ja mit dem Ende C in dem Fahrarm BF läuft, bewegt sich dabei mit unter die x-Achse. Das gleichschenklige Dreieck bleibt erhalten.

Das Gerät besteht aus einer Leitschiene L, in der sich ein Wagen bewegt. Auf dem Wagen sind, parallel zur Leitschiene, zwei Zapfen A und B angebracht, an denen die Arme eingehängt sind. Es gibt einen längeren Fahrarm BF, der an dem rechten Zapfen B eingehängt wird, und einen kürzeren Arm AC, der an dem linken Zapfen A eingehängt wird. Beide Arme können sich um ihren Einhängepunkt drehen. Das andere Ende C des kleinen Arms wird unten in den Fahrarm BF eingesetzt. Dort befindet sich eine Schiene, so dass der Punkt C auf dem Fahrarm auf und ab laufen kann.

An jedem der beiden Arme befindet sich eine Messrolle. Die Messrolle an dem Fahrarm BF rollt senkrecht zu dem Arm ab[9], die Rolle an dem kleineren Arm AC rollt parallel zu dem Arm ab.

An der Spitze des Fahrarms BF befindet sich ein Fahrstift F oder ein Visier oder eine Lupe, mit welcher die Kurve abgefahren wird, zu der die Fläche bzw. das Integral bestimmt werden soll.

Der kleine Arm hat die Länge c. Auch der Abstand zwischen den Zapfen A und B beträgt c. Der Fahrarm hat die Länge a. Der Winkel zwischen Fahrarm und x-Achse heißt α. Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist und wegen dem Innenwinkelsummensatz, kommen in dem Dreieck weiterhin nur noch die Winkel α und $\pi - 2\alpha$ vor. Damit beträgt der Winkel zwischen dem kleinen Arm und der x-Achse 2α.

Eine kurze Beschreibung, wie sich die Maschine bewegen kann:

Bewegt man den Fahrstift F nach rechts bzw. nach links, wird die ganze Apparatur aus Armen, Messrollen und dem Wagen in der Leitschiene L nach rechts bzw. links verschoben. Ansonsten ändert sich nichts.

Wird der Fahrstift F nach oben bzw. unten bewegt, so bewegt sich der Wagen in der Leitschiene nach links zum Fahrstift hin bzw. nach rechts, vom Fahrstift weg; Der kleine Arm AC dreht sich im Uhrzeigersinn bzw. gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt A; Der Winkel α wird größer bzw. kleiner; In dem Dreieck ABC bewegt sich der Punkt A von der Dreiecksseite BC weg bzw. bewegt sich darauf zu.

[9] Zu dem Begriff „in eine Richtung abrollen“ vgl. Kapitel 3.2.1 »Begriffe«.

3.3.3. Anwendung

Zunächst muss eine Zeichnung in geeignetem Maßstab vorliegen. Die Zeichnung darf die Maße 50x30 cm nicht überschreiten.

Die Leitschiene wird über die Zeichnung gelegt, sodass die Fahrschiene unten liegt (beachte Bild 9 und den Hinweis auf S. 16). Dann wird die Zeichnung ausgerichtet. Die Zeichnung sollte an das rechte Ende der Leitschiene gelegt werden, da der Fahrarm nach rechts orientiert ist und man dadurch nicht so schnell mit dem Wagen an das linke Ende der Leitschiene anstößt.

Dann muss das x-y-Koordinatensystem ausgerichtet werden. Zu diesem Zweck liegen dem Gerät zwei Distanzstäbe bei (In Bild 9 ganz rechts und links). Sie werden in die Leitschiene eingesetzt und ihre Spitzen liegen genau auf der Linie, die der x-Achse des Koordinatensystems entspricht. Die y-Achse verläuft senkrecht dazu. Man entscheidet sich also, wo die x-Achse liegen soll und richtet die Leitschiene mithilfe der Distanzstäbe so aus, dass ihre Spitzen auf der x-Achse liegen. Die Länge der Distanzstäbe entspricht genau dem Abstand der Zapfen zu der Leitschiene, wenn der Wagen in der Leitschiene läuft. Die x-Achse des Koordinatensystems verläuft also immer durch die beiden Zapfen auf dem Wagen (der an dieser Stelle noch nicht aufgebaut ist). Anschließend setzt man den Wagen auf die Schiene und fügt die Arme mit den Messrollen ein.

Bei ausschließlicher Flächenbestimmung ist die genaue Position des Koordinatensystems nicht relevant. Es muss nur jeder Punkt der Kurve durch den Fahrarm erreichbar sein[10]. Die Position und Ausrichtung des Koordinatensystems hat nur für die Bestimmung von $\int y^2 dx$ Bedeutung.

Zur Bestimmung von Rotationsvolumina muss die x-Achse der Drehachse entsprechen.

Soll $\int x^2 dy$ bestimmt werden, stellt man das Gerät so auf, dass die Spitzen der Führungswagen auf der Linie liegen, welche die y-Achse sein soll. Dadurch

[10] Die x-Achse kann auch durch die Zeichnung selbst verlaufen. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass, wenn der Großteil der Fläche oberhalb der x-Achse liegt, die Messrollenabwicklung ein negatives Vorzeichen bekommt. Entweder man ignoriert dieses Vorzeichen oder man fährt die Kurve in diesem Fall nicht im Uhrzeigersinn, sondern gegen den Uhrzeigersinn ab. Dann erhält man auch in diesem Fall das richtige Vorzeichen.

wird neben dem Gerät auch das Koordinatensystem um 90° gedreht und es wird nicht $\int y^2 dx$, sondern $\int x^2 dy$ bestimmt (vgl. 3.3.2 »Zweck«).

Nach dem Ausrichten setzt man die Spitze des Fahrarms an einem beliebigen Punkt der Kurve auf und notiert sich die aktuelle Zahl auf den Messrollen. Dann fährt man die Kurve im Uhrzeigersinn ab, bis man wieder an dem Punkt angekommen ist, an dem man begonnen hat. Man notiert sich erneut die Zahl auf den Messrollen und berechnet jeweils die Differenz.
Nun muss man diese Zahlen nur noch mit je einer Konstanten (der s.g. *Gerätekonstanten*) multiplizieren, die man der Geräteanleitung entnehmen kann. Liest man die Zahlen auf der Messrolle des großen Fahrarms ab, ergibt diese Rechnung den Flächeninhalt. Der Wert des Integrals $\int y^2 dx$ ergibt sich durch Ablesen der Messrolle des kleinen Arms.

Für die Messrolle zum Ablesen des Flächeninhaltes am langen Fahrarm beträgt diese Konstante

$$K = 20 \cdot \frac{2\pi}{100} = \frac{2}{5}\pi = 1{,}25663 \ldots$$

Vier Noniusteile auf der Messrolle entsprechen also ungefähr einer Fläche von 5 cm².

Für die Messrolle zum Ablesen des Integrals $\int y^2 dx$ am kleinen Arm beträgt die Konstante

$$K = \frac{20^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{100} = 4\pi = 12{,}5663 \ldots$$

Hier entsprechen vier Noniusteile also ungefähr 50 cm².

3.3.4. Wirkweise

Ausführungen über die Wirkweise findet man bei Willers (1951), S. 164ff. und Meyer zur Cappelen (1949), S. 179f. Anders als in der angeführten Literatur habe ich den leichter verständlichen Ansatz gewählt, das kombinierte Gerät in den Grund-Linearplanimeter und ein Quadrat-Linearplanimeter aufzuteilen und die Wirkweise dieser Geräte separat zu erklären. Die Funktionsweise des

kombinierten Geräts ergibt sich dann direkt aus der Funktionsweise der beiden separaten Geräte.

Als Beweis der Wirkweise des Grund-Linearplanimeters (Kapitel 3.3.4.1) stelle ich den Beweis von Blümich vor, welcher diesen wiederum von Kunkel übernommen und aus dem Englischen übersetzt hat [11]. Der Beweis des Quadrat-Linearplanimeters (Kapitel 3.3.4.2) ist ein Beweis von Fischer[12]. Beide Beweise sind neu bebildert und textlich überarbeitet. Weitere Ausführungen zu den separaten Geräten finden sich auch bei Willers und Meyer zur Cappelen[13].

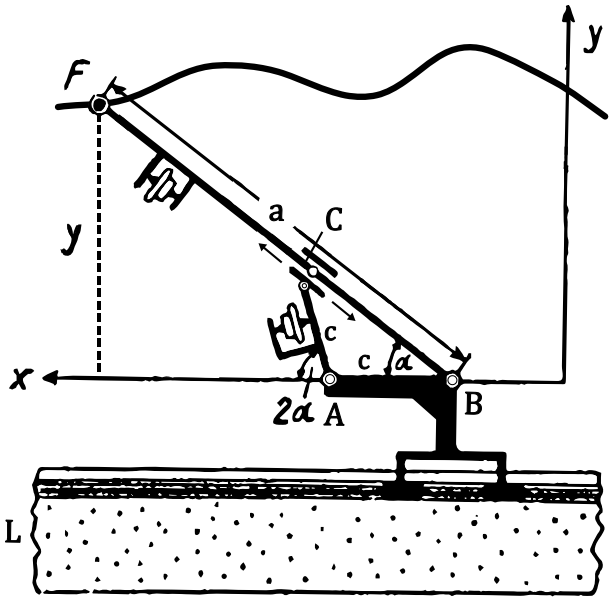

Bild 12: Quadrat-Linearplanimeter.

Bevor ich zu den Beweisen der einzelnen Geräte komme, will ich noch ein paar Worte über das kombinierte Gerät und seine Zusammensetzung aus den einzelnen Geräten verlieren.

Warum beweist die Funktionsweise der beiden einzelnen Geräte direkt die Funktionsweise des kombinierten Geräts? Das ergibt sich daraus, dass das kombinierte Gerät nur ein Quadrat-Linearplanimeter mit einer weiteren Messrolle am Fahrarm (Vgl. Bilder 12, 13 und 14) ist. Diese zusätzliche Messrolle schränkt das Quadrat-Linearplanimeter in keinster Weise ein. Gleichzeitig fügt es dem Gerät ein Grund-Linearplanimeter hinzu. Denn ein Grund-Linearplanimeter definiert sich aus nichts anderem als einem Fahrarm, dessen

[11] Vgl. Blümich, Wolf-G.: Das Planimeter. Wie funktioniert ein Polarplanimeter? http://bluemich.net/rechner/rmplanimeter.htm (Letzter Zugriff: 15.12.2013), welche wiederum basierend auf Kunkel, Paul: The Planimeter. http://whistleralley.com/planimeter/planimeter.htm (Letzter Zugriff: 15.12.2013).

[12] Vgl. Fischer, Joachim: Zur Rolle von Heinz Adler zwischen Ludwig Albert Ott und Alwin Oswald Walther. In: Hashagen, Ulf; Hellige, Hand Dieter (Hrsg.): Rechnende Maschinen im Wandel: Mathematik, Technik, Gesellschaft. Festschrift für Hartmut Petzhold zum 75. Geburtstag. Preprint 3. Deutsches Museum, 2011. http://www.deutsches-museum.de/fileadmin/Content/TRASH/PetzoldGesamt_2.pdf (Letzter Zugriff: 23.12.2013), S. 40f.

[13] Vgl. Willers (1951), S. 149f und Meyer zur Cappelen (1949), S. 180ff, sowie Willers (1951), S. 164ff. und Meyer zur Cappelen (1949), S. 202f.

eines Ende sich auf einer Geraden bewegt (der Zapfen B bewegt sich nur auf der x-Achse) und einer Messrolle an diesem Fahrarm, die senkrecht zu dem Arm abrollt. Letzteres ist aber gerade die neu hinzugefügte Messrolle. Auch die Funktion des Grund-Linearplanimeters wird dabei nicht eingeschränkt.

Um die Wirkweise des kombinierten Geräts zu verstehen, ist es hilfreich sich zuerst die Kapitel 3.3.4.1 und 3.3.4.2 durchzulesen, anschließend noch einmal zu diesem Text zurück zu kehren und die Bilder 12, 13 und 14 zu vergleichen.

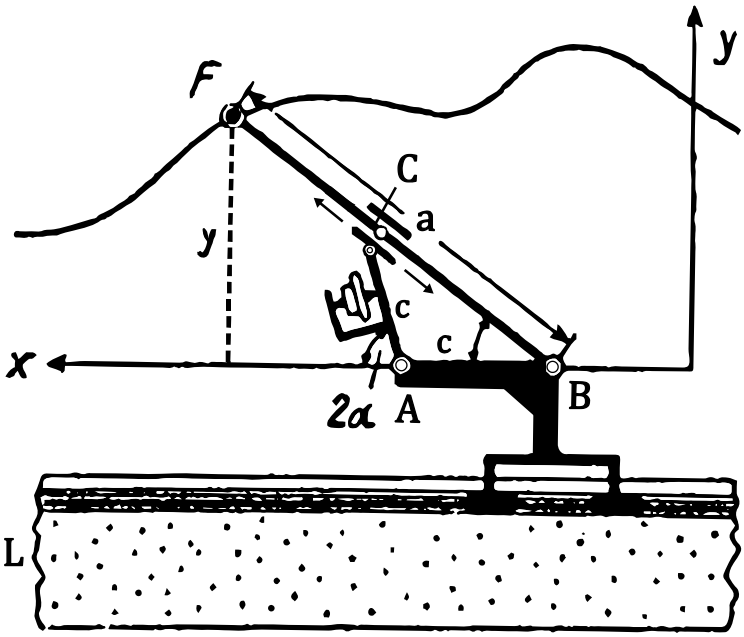

Bild 13: Kombiniertes Grund- und Quadrat-Linearplanimeter.

3.3.4.1. Grund-Linearplanimeter

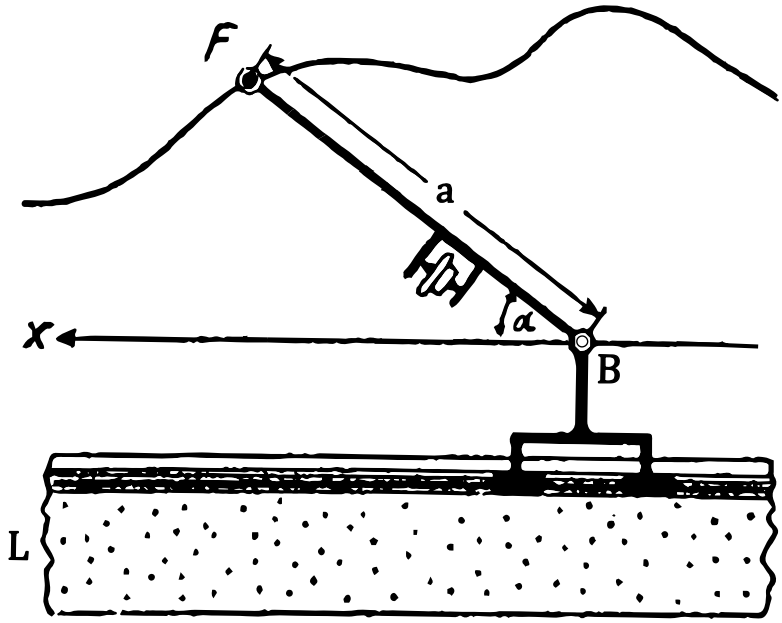

Bild 14: Grund-Linearplanimeter.

Hier soll nun also die Funktionsweise des Grund-Linearplanimeters erklärt werden. Es gibt im Aufbau nur zwei Unterschiede zum kombinierten Gerät. Auf dem Wagen findet sich kein zweiter Zapfen und es gibt auch keinen kleinen Arm mit Messrolle. Das Gerät besteht nur aus einem Fahrarm mit der Spitze F und der Länge a, dessen anderes Ende B durch den Wagen und die Leitschiene auf der x-Achse bewegt wird. Außerdem ist an dem Fahrarm noch eine Messrolle angebracht, die senkrecht zu dem Fahrarm abrollt.

Wie funktioniert dieses Gerät nun?

> <u>Behauptung</u>:
> Gegeben ist ein Fahrarm und eine Messrolle, die immer senkrecht zu dem Fahrarm abrollt. Das eine Ende des Fahrarms bewegt sich auf einer Geraden. Das andere Ende mit der Spitze F wird an einer geschlossenen, stetigen Kurve im Uhrzeigersinn einmal rundherum entlang geführt. Sei w die Rollenabwicklung der Messrolle.
> Dann ist die von der Kurve umgrenze Fläche $A = w \cdot a$, das Produkt aus der Rollenabwicklung w und der Fahrarmlänge a.

Beweis:

Betrachten wir zunächst einmal, was geschieht, wenn man den Fahrstift und auch den Rest des Geräts um m cm nach rechts oder links verschiebt.

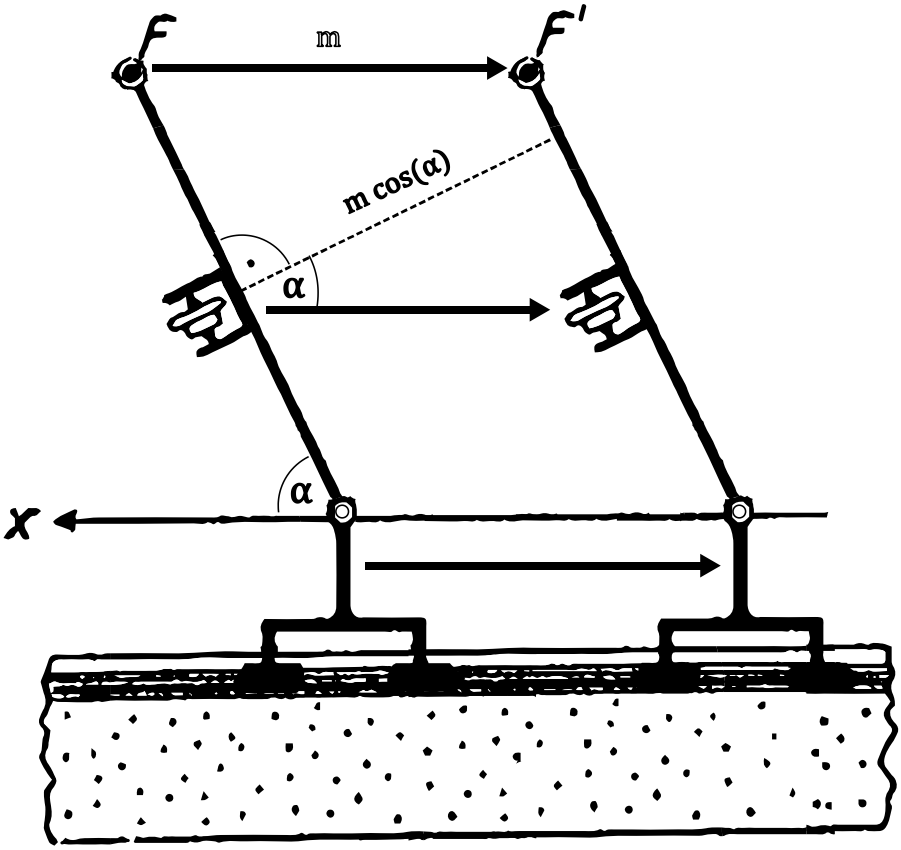

Bild 15: Bei einer Bewegung um m cm nach rechts, rollt sich die Messrolle um $w = m \cdot \cos(\alpha)$ cm ab (vgl. Kapitel 3.2.3.3).

Die Messrolle rollt sich dabei, wie in Kapitel 3.2.3.3 beschrieben, genau um $w = m \cdot \cos(\alpha)$ cm ab. Das ist aber gerade die Höhe des Parallelogramms, welches der Fahrarm bei der Bewegung überstreicht

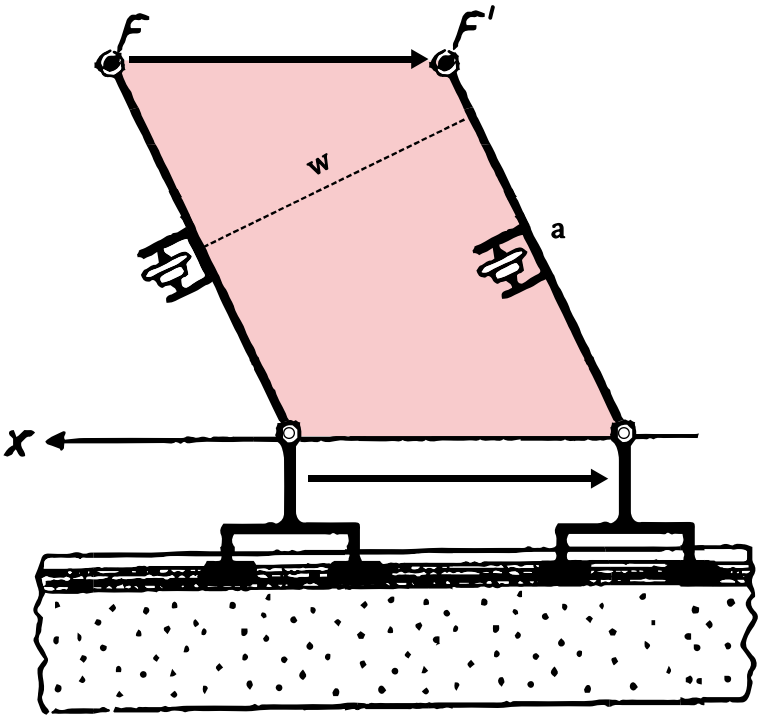

Bild 16: An der Messrolle kann man die Höhe des Parallelogramms ablesen.

Man kann an der Messrolle also die Höhe des Parallelogramms ablesen. Hier sieht man schon, dass $w \cdot a$ bereits ein Flächeninhalt ist, nämlich der Flächeninhalt des Parallelogramms, das der Fahrarm bei seiner Bewegung überstreicht. Was passiert, wenn sich der Fahrarm nicht nach rechts, sondern nach links bewegt? In diesem Fall rollt die Messrolle in die andere Richtung ab; w erhält ein negatives Vorzeichen, bleibt vom Betrag her aber gleich; $w \cdot a$ bekommt ein negatives Vorzeichen, beträgt aber immer noch genau den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Tatsächlich ist $w \cdot a$ nicht nur die Fläche des Parallelogramms. Bei einer solchen gradlinigen Bewegung des Fahrstifts um m cm nach rechts oder links, misst $w \cdot a$ den Flächeninhalt des *Rechtecks* unter dieser Bewegung. Die Fläche dieses Rechtecks ist nämlich identisch mit der Fläche des Parallelogramms.

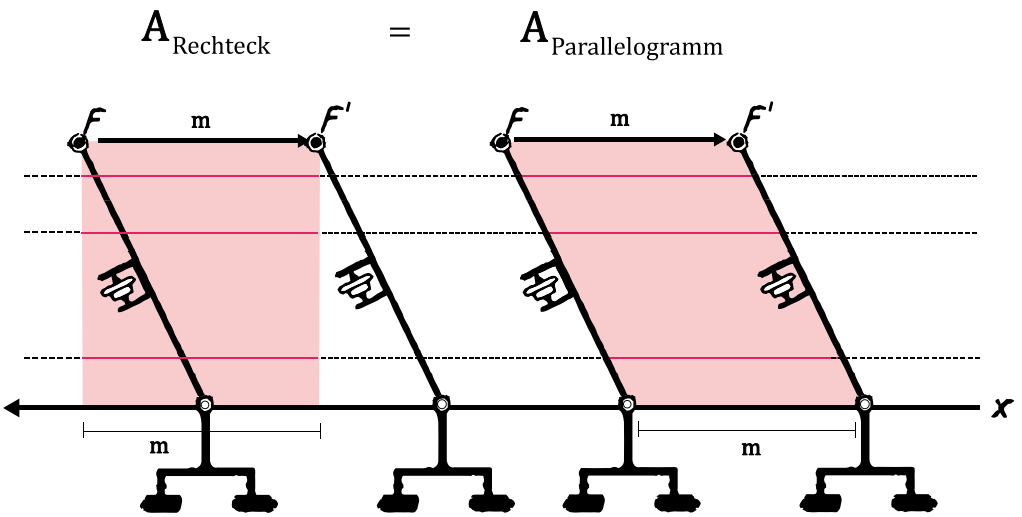

Bild 17: Rechteck und Parallelogramm haben denselben Flächeninhalt. Ganz egal, wo man die beiden Flächen Horizontal durchschneidet, man erhält überall dieselbe Schnittstrecke der Länge m. Hier Beispielhaft für drei horizontale Schnitte.

Das ergibt sich aus dem Prinzip von Cavalieri. Das Prinzip von Cavalieri besagt, dass, wenn zwei Flächen gleicher Höhe nebeneinander liegen, man diese Flächen an irgendeiner Stelle horizontal schneidet und dabei immer Schnittstrecken mit derselben Länge erhält, beide Flächen denselben Flächeninhalt haben müssen. Das ist in unserem Fall gegeben. Alle Schnittstrecken haben die Länge m (vgl. Bild 17).

Sehr anschaulich ist das Prinzip von Cavalieri auch im dreidimensionalen Fall: Wenn zwei Körper gleicher Höhe nebeneinander stehen, man sie an einer beliebigen Stelle parallel zur Grundfläche schneidet und dabei immer Querschnittsflächen mit demselben Flächeninhalt erhält, dann müssen beide Körper dasselbe Volumen haben.

Bild 18: Prinzip von Cavalieri im dreidimensionalen Fall. Beide Münzstapel haben denselben Flächeninhalt, denn wenn man sie an einer beliebigen Stelle parallel zur Grundfläche schneidet, erhält man immer dieselbe Querschnittsfläche, einen Kreis mit dem Radius der Münze.

Somit ist bewiesen, dass bei einer horizontalen Bewegung des Fahrstifts das Planimeter den Flächeninhalt zwischen dieser Bewegung und der x-Achse (das Rechteck) misst. In der Praxis macht man mit dem Planimeter jedoch nicht nur horizontale Bewegungen, sonder Bewegungen in alle Richtungen, da man geschlossene Kurven umfährt. Um die Behauptung für eine allgemeine Kurve zu beweisen, beweisen wir sie zunächst für eine Kurve, die ein Rechteck bildet: Das Gerät wird in der linken oberen Ecke angesetzt und im Uhrzeigersinn am Rechteck entlanggeführt.

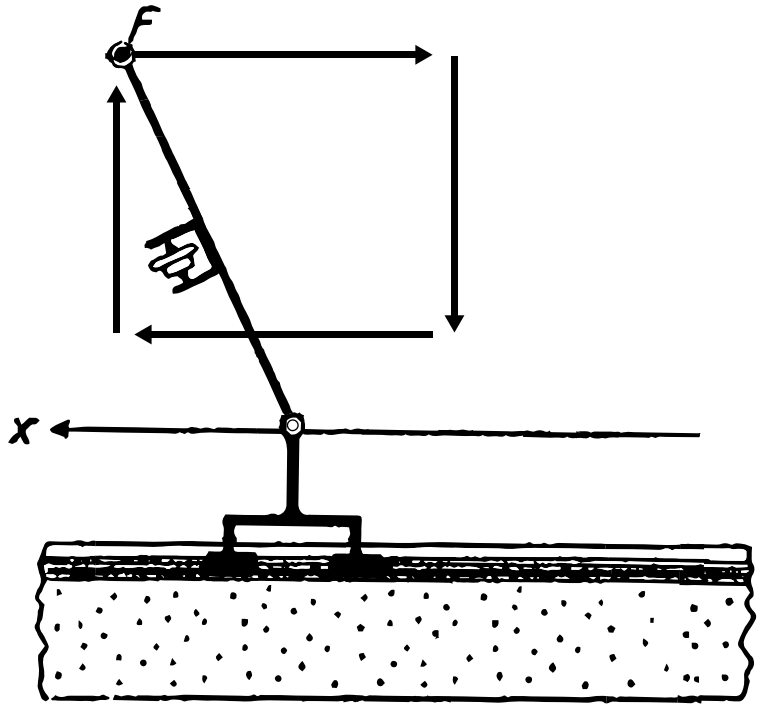

Bild 19: Abfahren eines Rechtecks, links oben angefangen, im Uhrzeigersinn.

Bei dieser Bewegung macht das Gerät eigentlich vier Bewegungen, eine nach rechts, eine nach unten, eine nach links und eine nach oben. So lässt sich auch die Messrollenabwicklung w in vier Messrollenabwicklungen der einzelnen Bewegungen aufteilen. Die Formel $w \cdot a$ lässt sich dann aufteilen in

$$w \cdot a = (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \cdot a = w_1 \cdot a + w_2 \cdot a + w_3 \cdot a + w_4 \cdot a.$$

Für die erste Bewegung und die dritte Bewegung (die beiden horizontalen Bewegungen) sind diese Summanden schon bekannt: $w_1 \cdot a$ beträgt den Flächeninhalt zwischen der oberen Rechteckskante und der x-Achse mit positivem Vorzeichen, weil die Bewegung nach rechts verläuft. $w_3 \cdot a$ beträgt den Flächeninhalt zwischen der unteren Rechteckskante und der x-Achse mit negativem Vorzeichen, weil die Bewegung nach links verläuft. Zusammengenommen, Rechteck obere Kante bis x-Achse minus Rechteck untere Kante bis x-Achse, erhalten wir genau den Flächeninhalt A des Rechtecks, das wir umfahren.

Es ist also gezeigt, dass $w \cdot a = A + (w_2 + w_4) \cdot a$ ist. Die ursprüngliche Behauptung sagt aber, dass $w \cdot a = A$ ist. w_2 muss also $-w_4$ sein und das ist in der Tat der Fall: Bei der Bewegung nach unten wird die Messrolle auf einer bestimmten Kurve entlang gezogen, ändert dabei stetig ihre Messrollenrichtung

und die Messrolle wickelt sich um w_2 ab. Bei der Bewegung nach oben wird die Messrolle, horizontal versetzt, auf exakt derselben Kurve nach oben gezogen, ändert dabei stetig an denselben Stellen ihre Messrollenrichtung und die Messrolle wickelt sich um w_4 ab. Es wird also zweimal dieselbe Bewegung, einmal vorwärts, einmal rückwärts ausgeführt, nur ein Stück horizontal versetzt; Also muss $w_2 = -w_4$ und $w \cdot a = A$ sein.
Nun mag ein Leser einwenden, bei den horizontalen Bewegungen (der ersten und der dritten Bewegung) würde die Messrolle doch auch auf denselben Kurven gezogen, nur eben vertikal versetzt; Die Messrollenabwicklungen müssten sich also auch gegenseitig aufheben. Tatsächlich wird die Messrolle zwar in beiden Fällen vertikal versetzt auf derselben Kurve gezogen, hat aber jeweils eine andere Messrollenrichtung, sodass sich die Bewegungen nicht gegenseitig aufheben.

Nun ist also gezeigt, dass das Planimeter bei Umfahren eines Rechtecks den Flächeninhalt des Rechtecks bestimmt. Zuletzt soll noch gezeigt werden, dass das Planimeter bei dem Umfahren einer beliebigen, stetigen und geschlossenen Kurve den Flächeninhalt der Fläche innerhalb dieser Kurve bestimmt und für ihn die Formal $A = w \cdot a$ gilt.
Hier ein Beispiel für eine solche Kurve:

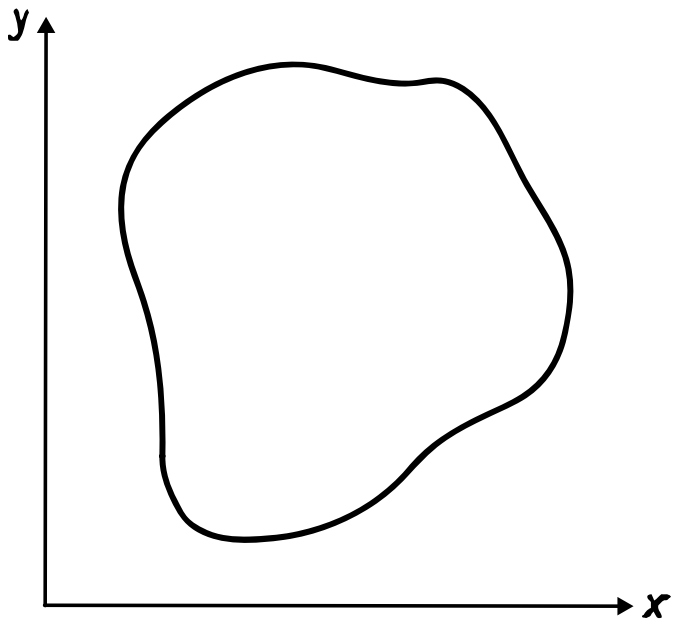

Bild 20: Ein einfach zusammenhängendes Gebiet, umschlossen von einer geschlossenen, stetigen Kurve.

Eine Methode, mit Bleistift und Lineal, den Flächeninhalt von Hand zu bestimmen ist es, die Fläche innerhalb der Kurve mit Rechtecken auszufüllen. D en Flächeninhalt von Rechtecken kann man sehr schnell bestimmen, und wenn man immer kleinere Rechtecke zeichnet (gerade in der Nähe des Rands der Fläche), dann ergibt die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke eine immer genauere Annäherung für den Flächeninhalt der gesuchten Fläche. Die Rechtecke können auch über den Rand der Fläche hinaus schauen. Man erhält trotzdem eine immer genauere Annäherung der Fläche.

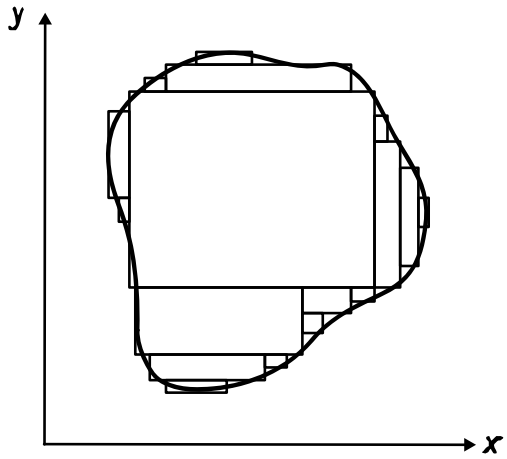

Bild 21: Die Fläche mit Rechtecken ausgefüllt.

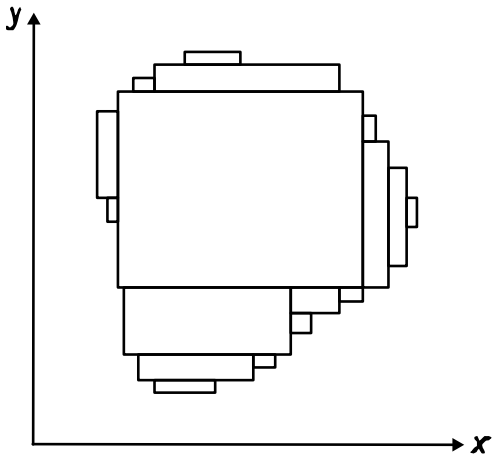

Bild 22: Nur die Rechtecke. Zählt man ihre Flächeninhalte zusammen, erhält man eine Näherung für den Flächeninhalt der gesuchten Fläche.

Auf diese Weise kann man natürlich auch bei der Arbeit mit den Planimeter vorgehen. Man kann die Fläche mit Rechtecken ausfüllen und anschließend die Fläche der Rechtecke, eine nach der anderen, mit dem Planimeter bestimmen.
Wenn man nun diese Rechtecke mit dem Planimeter umfährt, stellt man schnell fest, dass man dieselben Strecken oft mehrmals befährt. Genauer gesagt, wenn eine Strecke nicht zum Rand des gesamten Rechteck-Gebildes gehört, dann umfährt man sie genau zweimal, denn sie gehört nicht nur zu der Kante eines Rechtecks, sondern auch noch zu der Kante eines anderen Rechtecks.
Es ist aber nicht nur so, dass die Strecken im Inneren des Rechteck-Gebildes immer zweimal von dem Planimeter befahren werden, sie werden außerdem bei dem zweiten Befahren immer in die entgegengesetzte Richtung befahren wie beim ersten Mal. Das liegt daran, dass, wenn zwei Rechtecke aneinander liegen, immer die obere Kante des einen Rechtecks an der unteren Kante des

anderen Rechtecks liegt oder aber die rechte Kante des einen an der linken Kante des anderen liegt. Obere und untere bzw. rechte und linke Kanten werden aber mit dem Planimeter immer in entgegengesetzter Richtung befahren.
Bei allen diesen Strecken, die doppelt befahren werden, heben sich in Bezug auf die Messrolle des Planimeters also alle Bewegungen auf (diesmal auch die horizontalen Bewegungen). Bei allen diesen Bewegungen wird die Messrolle wieder entlang derselben Kurve einmal hin und einmal zurück gezogen und hat dabei an denselben Stellen immer dieselbe Messrollenrichtung. Dadurch wird das Befahren der Strecken im Inneren des Rechteck-Gebildes überflüssig und übrig bleibt die Bewegung auf dem Rand (vgl. Bilder 23 und 24).

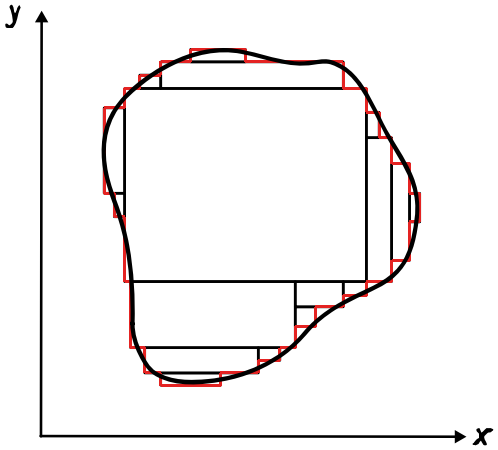

Bild 23: Die rot gezeichneten Strecken werden nicht doppelt befahren, nur bei dem Befahren dieser Strecken heben sich die Bewegungen nicht gegenseitig auf.

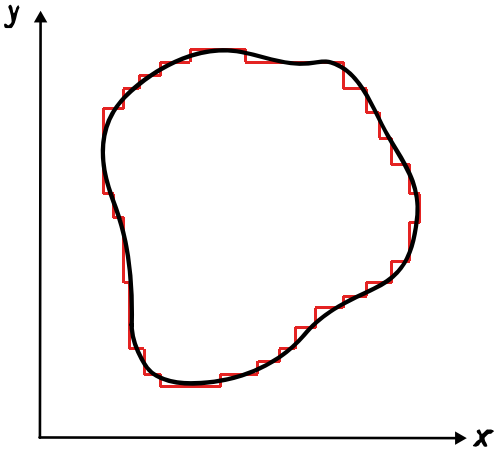

Bild 24: Wenn das Planimeter die rote Kurve umfährt, bestimmt es den Flächeninhalt innerhalb der Kurve. Je kleiner die Rechtecke, desto näher ist der bestimmte Flächeninhalt am gesuchten.

Wenn man aber nur noch die rote Kurve umfährt, ist das schon fast so, als ob man die schwarze Kurve selbst umfährt. Auch beim Umfahren der schwarzen Kurve macht man mit der Hand niemals perfekte Bewegungen auf der Kurve, vielmehr zittert die Hand leicht und verrutscht ab und zu. Die Kurve, die man, wenn man das Planimeter von Hand an der Kurve entlang führt, mit dem Planimeter tatsächlich nachzeichnet, entspricht also schon von Natur aus eher der roten als der schwarzen Kurve. Trotzdem bestimmt man mit den Rechtecken eine sehr genaue Näherung der gesuchten Fläche. Je kleiner man die Rechtecke macht, je weniger man mit der Hand verrutscht und zittert, desto weniger lässt

sich die rote von der schwarzen Kurve unterscheiden und desto genauer bestimmt man den Flächeninhalt innerhalb der schwarzen Kurve.

Der Flächeninhalt berechnet sich dann nach unserer altbekannten Formel für Rechtecke:

$$A = w \cdot a.$$

q.e.d.

3.3.4.2. Quadrat-Linearplanimeter

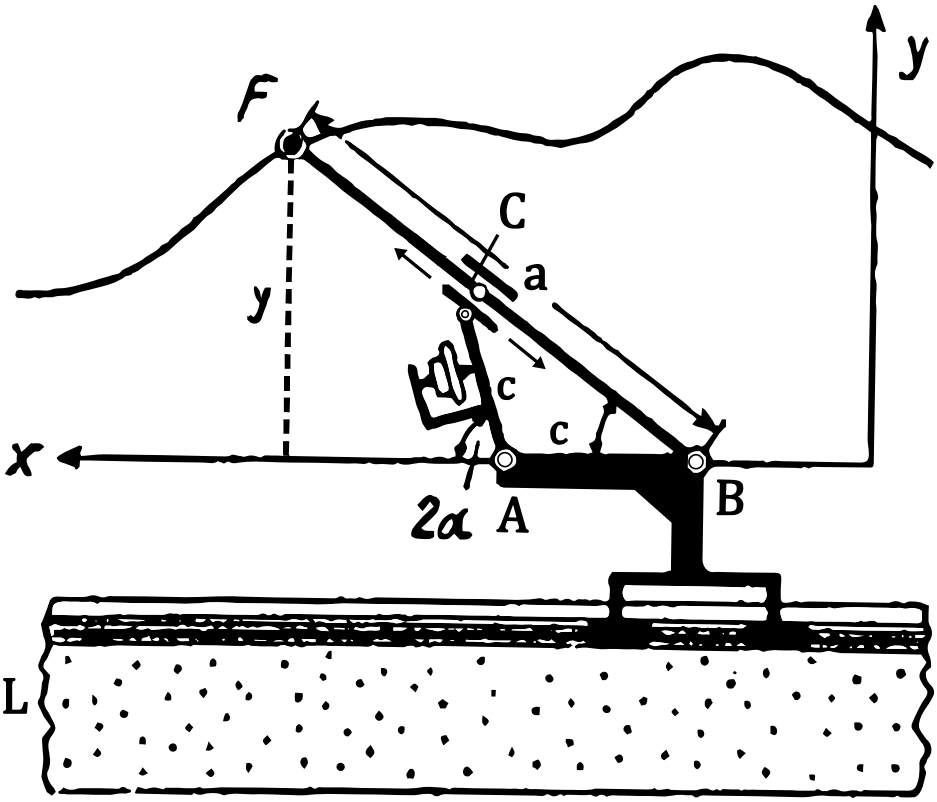

Bild 25: Quadrat-Linearplanimeter.

Hier soll nun die Funktionsweise des Quadrat-Linearplanimeters erklärt werden. Das Gerät sieht dem kombinierten Gerät bereits sehr ähnlich, ihm fehlt lediglich die Messrolle an dem Fahrarm.

Im Vergleich des Quadrat-Linearplanimeters mit dem Grund-Linearplanimeter fallen nur drei Unterschiede auf.

Der Wagen in der Leitschiene ist oben breiter und hat einen zusätzlichen Zapfen, der parallel zur Leitschiene liegt. In dem zusätzlichen Zapfen ist ein kleiner Arm eingehängt, dessen anderes Ende in dem Fahrarm läuft. Zudem ist die Messrolle nicht mehr senkrecht an dem Fahrarm, sondern *parallel* an den *kleinen Arm* angebracht.

Es lohnt sich also, diese Bauteile und ihre Umgebung etwas genauer zu betrachten, wenn man das Quadratplanimeter verstehen will.

Was ist das für ein kleiner Arm mit der Messrolle? Während das Arm-Ende an dem Wagen sich nur um die Befestigung drehen kann, läuft das andere Ende in dem Fahrarm. Weil der kleine Arm eine feste Länge hat und auf dem Wagen fest montiert ist, hängt sein Winkel von dem Winkel des Fahrarms ab. Zeigt

der Fahrarm sehr weit nach oben, befindet sich das bewegliche Ende des kleinen Arms sehr nah am Wagen und der Arm hat einen sehr großen Winkel zur x-Achse. Liegt der Fahrarm dagegen sehr flach an der x-Achse, liegt auch der kleine Arm sehr flach und weit vom Wagen weg und hat einen kleinen Winkel zur x-Achse.

Wie bereits aus den Ausführungen über dem Aufbau des kombinierten Geräts bekannt (vgl. Kapitel 3.3.2 »Aufbau«), hat der kleine Arm die Länge c, was gleichzeitig der Abstand der beiden Zapfen A und C ist. Das wiederum führt dazu, dass der kleine Arm, wie in dem Bild eingezeichnet, den Winkel 2α gegen die Leitgerade (die x-Achse) hat.

Ich führe nun eine Hilfsvorstellung ein. An dem Zapfen, an dem der kleine Arm angebracht ist, sei noch ein zweiter, größerer Arm befestigt. Dieser Arm sei mithilfe eines Winkels so angebracht, dass er immer senkrecht zum kleinen Arm steht und sich mit diesem um den Zapfen auf dem Wagen dreht.

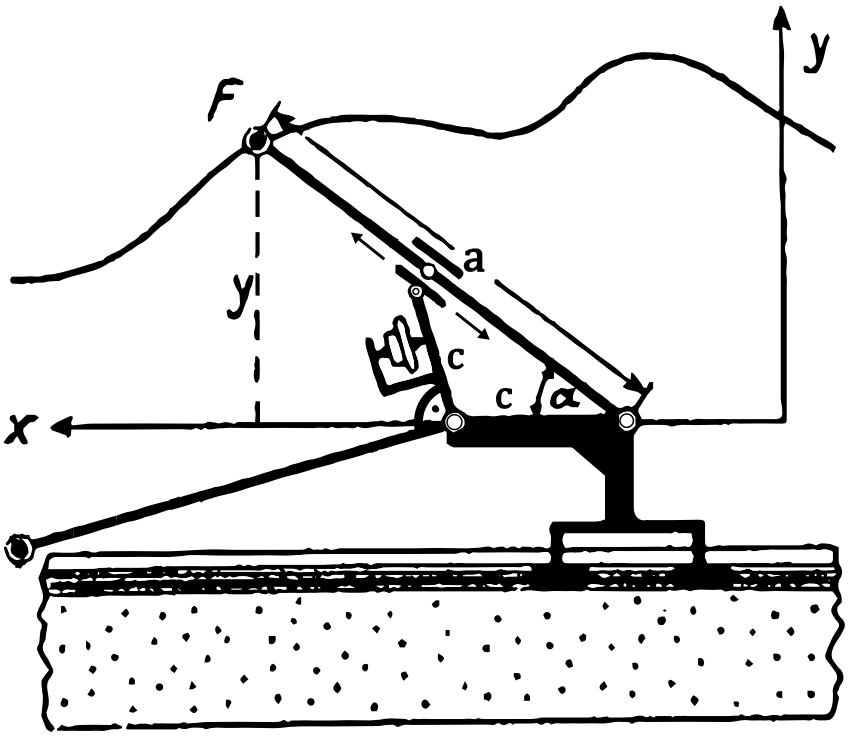

Bild 26: Quadrat-Linearplanimeter mit zusätzlichem Arm.

Ich werden nun zeigen, dass die Spitze dieses neu hinzugefügten Arms, wenn man die Länge des Arms geschickt wählt, gerade die Kurve y^2 nachzeichnet, wenn man mit dem Fahrarm unseres Geräts die Kurve y abfährt. Damit ist

schon alles gezeigt und es ist bewiesen, dass die Messrolle auf dem kleinen Arm, bis auf die Multiplikation mit der Länge des neu hinzugefügten Arms, den Wert $\int y^2 dx$ anzeigt, denn die Messrolle rollt immer senkrecht zu dem neuen Arm ab. Das eine Ende des neuen Arms läuft auf einer Gerade, das andere Ende, wird, wie ich gleich zeigen werden, auf dem Graph von y^2 einmal rundherum geführt. Damit folgt die Behauptung direkt aus dem Beweis, der im letzten Kapitel (3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«) durchgeführt wurde.
Der neu hinzugefügte Arm ist nur eine Hilfsvorstellung. Er ist für die tatsächliche Konstruktion des Geräts nicht nötig und wird deshalb eingespart. Die Messrolle zeigt auch ohne ihn das richtige Ergebnis an. Nur die Länge des Arms ist von Bedeutung, weil sie in die Gerätekonstante einfließt.

Ich zeige nun nur noch, dass der neu hinzugefügte Arm, mit der richtigen Länge, die Kurve y^2 abfährt.

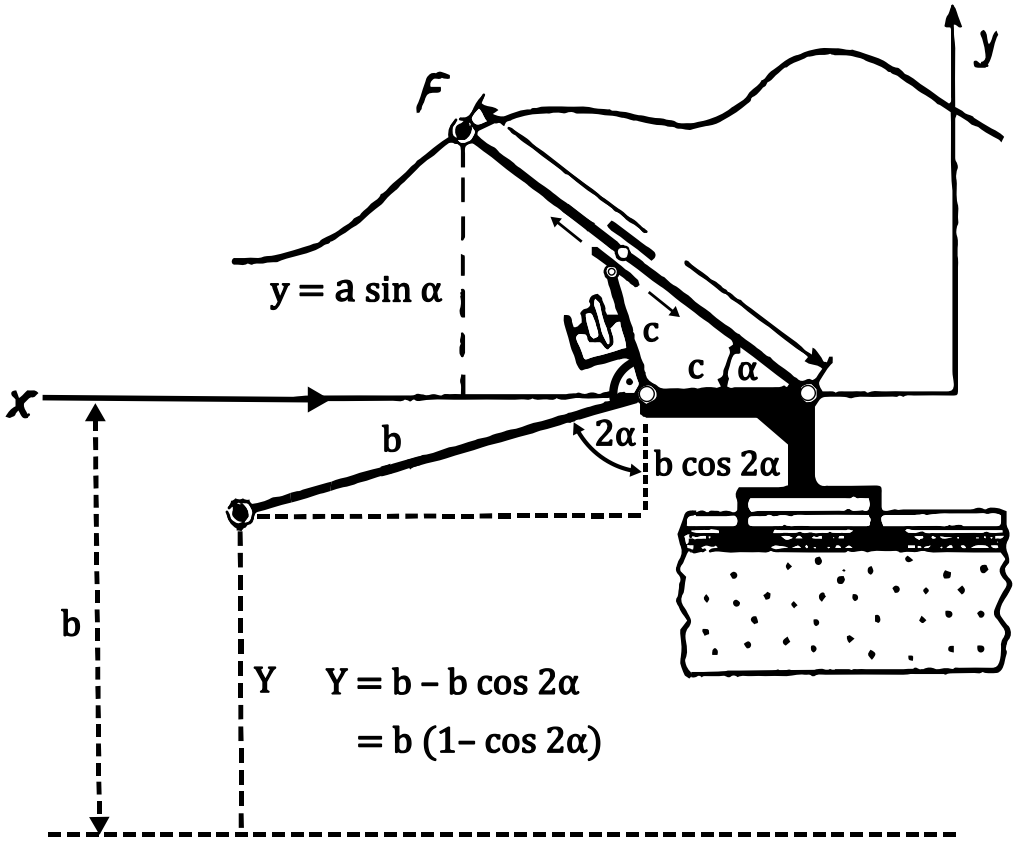

Bild 27: Schematische Zeichnung der Funktionsweise.

Es folgt eine neue Notation, die Länge des neu-hinzugefügten Armes heißt nun b. Außerdem betrachte ich eine x-Achsen-Parallele, deren Abstand zur x-

Achse gerade die Länge des neuen Arms, b, beträgt. Y sei der Abstand der Spitze des neuen Armes zu der x-Achsen-Parallelen.

Nun kann man folgende Schlussfolgerungen treffen:

Der in der Zeichnung unter dem Arm b eingezeichnete Winkel beträgt offensichtlich 2α.[14]

Die Strecke $b - Y$ ist offensichtlich $b\cos(2\alpha)$, und damit ist

$$Y = b - b\cos(2\alpha) = b(1 - \cos(2\alpha)).$$

Erkennbar ist auch, dass sich unter dem Fahrarm ein rechtwinkliges Dreieck aufspannt und dass gilt: $y = a\sin(\alpha) \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{y}{a}$.

Was nun ausgenutzt wird, ist das folgende Additionstheorem:

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow (1 - \cos(2\alpha)) = 2\sin^2(\alpha).$$

In unserem Fall lässt sich also Y umformulieren zu

$$Y = b(1 - \cos(2\alpha)) = b \cdot 2\sin^2(\alpha).$$

Wegen der oben angedeuteten rechtwinkligen Dreiecksbeziehung gilt weiter

$$Y = b \cdot 2\sin^2(\alpha) = b \cdot 2 \cdot \left(\frac{y}{a}\right)^2 = \frac{2b}{a^2} \cdot y^2$$
$$\Leftrightarrow Y = \frac{2b}{a^2} \cdot y^2.$$

Wählt man nun noch $a^2 = 2b \Leftrightarrow b = \frac{a^2}{2}$, erhält man die Beziehung

$$Y = y^2.$$

Der Arm b zeichnet also den Graph der Funktion y^2 wenn man mit dem Fahrarm den Graph der Funktion y abfährt und als Länge des Armes $b = \frac{a^2}{2}$ wählt. Gemäß des Beweises aus dem letzten Kapitel (3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«) beträgt $\int y^2 dx = w \cdot \frac{a^2}{2}$, wobei w die Messrollenabwicklung der Messrolle an dem kleinen Arm ist.

q.e.d.

[14] Der Winkel des kleinen Armes c gegen die x-Achse, der auch 2α beträgt, ist der Übersichtlichkeit halber nicht mehr eingezeichnet worden.

3.4. Integrimeter

3.4.1. Zweck

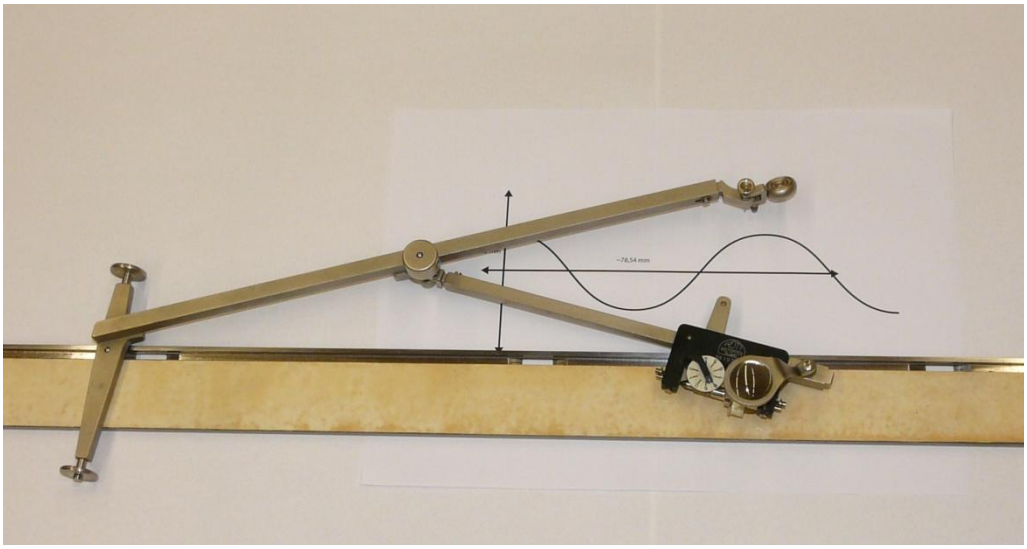

Bild 28: Integrimeter.

Als Integrimeter werden Planimeter bezeichnet, welche die Fläche zwischen der x-Achse und einer gegebenen, stetigen Kurve bestimmen und bei denen man den Flächeninhalt noch während dem Abfahren der Kurve an der Messrolle ablesen kann.

Das ist bei gewöhnlichen Grundplanimetern nicht ohne weiteres gegeben. So kann man beispielsweise bei dem kombinierten Grund- und Quadrat-Linearplanimeter den Flächeninhalt während des Umfahrens nur dann an der Messrolle ablesen, wenn sich die aktuelle Fahrstift-Position auf derselben Höhe befindet, wie die Stelle, an der man mit der Messung begonnen hat[15].

Auf diese Weise eignet sich das Integrimeter sehr gut, um beispielsweise fortlaufende Kurven auszuwerten, die von einer Maschine auf Endlospapier gedruckt werden.

[15] Sonst würde auf Seite 27 $w_2 \neq -w_4$ und damit $w \cdot a \neq A$ sein.

3.4.2. Aufbau

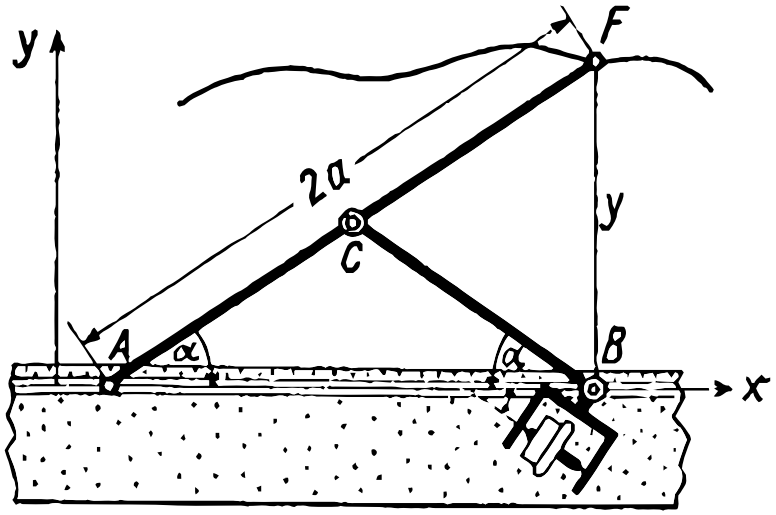

Bild 29: Skizze eines Integrimeters.

Das Integrimeter ähnelt in seinem Aufbau stark dem (Grund-)Linearplanimeter (vgl. Kapitel 3.3.4.1). Es besteht aus einem Fahrarm mit der Fahrarmlänge $2a$, dessen eines Ende A auf einer Gerade (der x-Achse) läuft und an dessen anderen Ende F ein Fahrstift angebracht ist, mit dem man die Kurve abfährt. Anders als beim Linearplanimeter wird die x-Achse nicht durch eine Leitschiene mit Wagen realisiert, auf dem der Fahrarm angebracht ist. Beim Integrimeter gibt es ausschließlich eine Leitschiene und der Fahrarm bewegt sich in der Leitschiene selbst, ohne von einem Wagen geführt zu werden. Dadurch wird erreicht, dass die x-Achse gleich der Schiene ist, in der sich der Fahrarm bewegt und sich die x-Achse nicht auf Höhe des Wagens, also etwas über der Schiene befindet.

In der Mitte des Fahrarms, am Punkt C, ist ein weiterer Arm angebracht, der genau halb so lang ist wie der Fahrarm und die Länge a hat. Der kleine Arm läuft mit seinem anderen Ende B ebenfalls in der Leitschiene. Der große Fahrarm ist in dem Punkt A drehbar. Der kleine Arm in den Punkten B und C. Die Punkte A und C können sich auf der x-Achse Bewegen. Am Ende B des kleinen Armes ist eine Messrolle angebracht. Die Messrollenrichtung geht immer durch den Punkt B, gleichzeitig rollt die Messrolle immer senkrecht zu dem Arm BC ab. Die Messrolle ist auch drehbar um den Punkt B, aber nur zusammen mit dem kleinen Arm BC.

Der Winkel zwischen x-Achse und Fahrarm heißt α. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, weil AC und CB jeweils dieselbe Länge a haben.
Es ergeben sich folgende Bewegungsabläufe:
Wird der Fahrstift F nach oben bzw. unten bewegt, rückt der Punkt A nach rechts näher an den Punkt B heran bzw. rückt nach links weiter von ihm weg. Der Punkt B verändert sich nicht. Der Winkel α wird größer bzw. kleiner. Die Messrolle bewegt sich auf der Leitschiene im Uhrzeigersinn bzw. gegen den Uhrzeigersinn.
Wird der Fahrstift F nach rechts bzw. links bewegt, wird die ganze Maschine nach rechts bzw. links bewegt.

3.4.3. Anwendung

Zunächst muss eine Zeichnung in geeignetem Maßstab vorliegen. Die Zeichnung darf die Maße 80x30 cm nicht überschreiten.
Die Zeichnung sollte am rechten Ende der Leitschiene ausgerichtet werden, da der Fahrarm nach rechts orientiert ist und man dadurch nicht so schnell am linken Ende der Leitschiene anstößt. Anschließend muss die Leitschiene an der Zeichnung ausgerichtet werden. In der Schiene befinden sich in regelmäßigen Abständen Visiere, mit deren Hilfe man die Schiene genau über der x-Achse oder jeder anderen beliebigen Gerade platzieren kann.
Nun fügt man die fehlenden Teile des Geräts hinzu, setzt den Fahrstift dort auf, wo man mit dem Abfahren beginnen will und notiert sich die aktuelle Zahl auf der Messrolle. Dann fährt man die Kurve im Uhrzeigersinn ab, bis man an der Stelle ist, an der man den Flächeninhalt zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse ablesen will. Man notiert sich erneut die Zahl auf der Messrolle und berechnet die Differenz.
Nun muss man diese Zahle nur noch je mit einer Konstanten (der s.g. *Gerätekonstanten*) multiplizieren, die man der Geräteanleitung entnehmen kann. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist der Flächeninhalt.
Die Gerätekonstante beträgt

$$K = 33 \cdot \frac{2\pi}{100} = \frac{66}{100}\pi = 2{,}07345 \ldots$$

Fünf Noniusteile entsprechen also ungefähr einer Fläche von 11 cm².

3.4.4. Wirkweise

Ausführungen zum Integrimeter findet man bei Fischer (1998), S. 169; Willers (1951), S. 182ff. und Meyer zur Cappelen (1949), S. 218ff. Das Kapitel »Wirkweise« nimmt jedoch auf keine dieser Ausführungen Bezug.

Das Integrimeter lässt sich auf Basis der Ausführungen zu der Funktionsweise des (Grund-)Linearplanimeters (vgl. Kapitel 3.3.4.1) und der theoretischen Betrachtung der Messrollenabwicklung (vgl. Kapitel 3.2.3.3, insbesondere S. 13) erklären.

Das Integrimeter ist eine optimierte Abwandlung des Linearplanimeters. In Kapitel 3.3.4.1 wurde bereits erklärt, dass das Linearplanimeter bei einer horizontalen Bewegung nach rechts oder links den Flächeninhalt des Rechtecks zwischen der Strecke, die der Fahrstift abfährt, und der x-Achse bestimmt. Die vertikalen Bewegungen nach oben und unten haben sich bei dem Linearplanimeter in Bezug auf die Messrollenabwicklung immer gegenseitig aufgehoben. Damit sich die Bewegungen aufheben konnten, musste der Fahrstift im Laufe der Bewegung immer genauso weit nach oben, wie nach unten bewegt werden. Deshalb kann das Gerät immer nur geschlossene Kurven abfahren oder die Messung muss zumindest an einer Stelle aufhören, die auf derselben Höhe liegt wie der Startpunkt, um den korrekten Flächeninhalt ablesen zu können.
An dieser Stelle setzt die Optimierung des Integrimeters an. Beim Integrimeter hat eine Verschiebung des Fahrstiftes nach oben oder unten gar keine Auswirkung auf die Messrollenabwicklung. Die Messrolle rollt sich bei diesen Bewegungen nicht ab. Auf diese Weise werden die vertikalen Bewegungen völlig irrelevant. Man könnte den Fahrstift einen Zentimeter nach oben, vier nach rechts und fünf nach unten bewegen und würde doch nur den Flächeninhalt unter der Bewegung um vier Zentimeter nach rechts bestimmen.
Das wird dadurch erreicht, dass die Messrolle drehbar in dem Punkt B angebracht ist und die Messrollenrichtung immer durch den Punkt B geht. Bei einer Bewegung des Fahrstifts nach oben oder unten verändert sich dann der Winkel α und die Messrolle wird im Kreis um den Punkt B gezogen. Weil die Messrollenrichtung aber genau auf die Kreismitte B zeigt, bedeutet das, dass die

Messrolle senkrecht zur Rollrichtung in Rollachsenrichtung gezogen wird. Bei solchen Bewegungen rollt die Messrolle nicht ab.

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass die Messrolle bei horizontalen Bewegungen nach rechts oder links den Flächeninhalt zwischen diesen Bewegungen und der x-Achse misst. Ist dies gegeben, dann ist offensichtlich, dass das Integrimeter beim Abfahren einer Kurve den Flächeninhalt unter einer Treppenfunktion bestimmt, welche die Kurve sehr gut approximiert.
Wir zeigen nun, dass die Messrollenabwicklung bei horizontalen Bewegungen dieselbe ist wie bei einem Grund-Linearplanimeter:
Die Messrollenrichtung der Messrolle des Integrimeters hat gegen die x-Achse einen Winkel von $\pi - \alpha$. Wäre die Messrolle stattdessen, wie bei dem Linearplanimeter, an dem großen Fahrarm angebracht und würde senkrecht zu diesem abrollen, würde der Winkel zwischen Messrollenrichtung und Leitgerade in negativer Richtung $-(\pi - \alpha)$ betragen. Die beiden Winkel sind also symmetrisch zu der x-Achse. Nach Kapitel 3.2.3.3, S. 13 muss also bei gradlinigen Bewegungen entlang der x-Achse die Messrollenabwicklung der beiden Rollen gleich sein. Was horizontale Verschiebungen des Geräts angeht, könnte die Messrolle also genauso gut senkrecht zum Fahrarm angebracht sein. Es würde keinen Unterschied machen.

q.e.d.

3.5. Polarplanimeter

3.5.1. Zweck, Aufbau und Anwendung

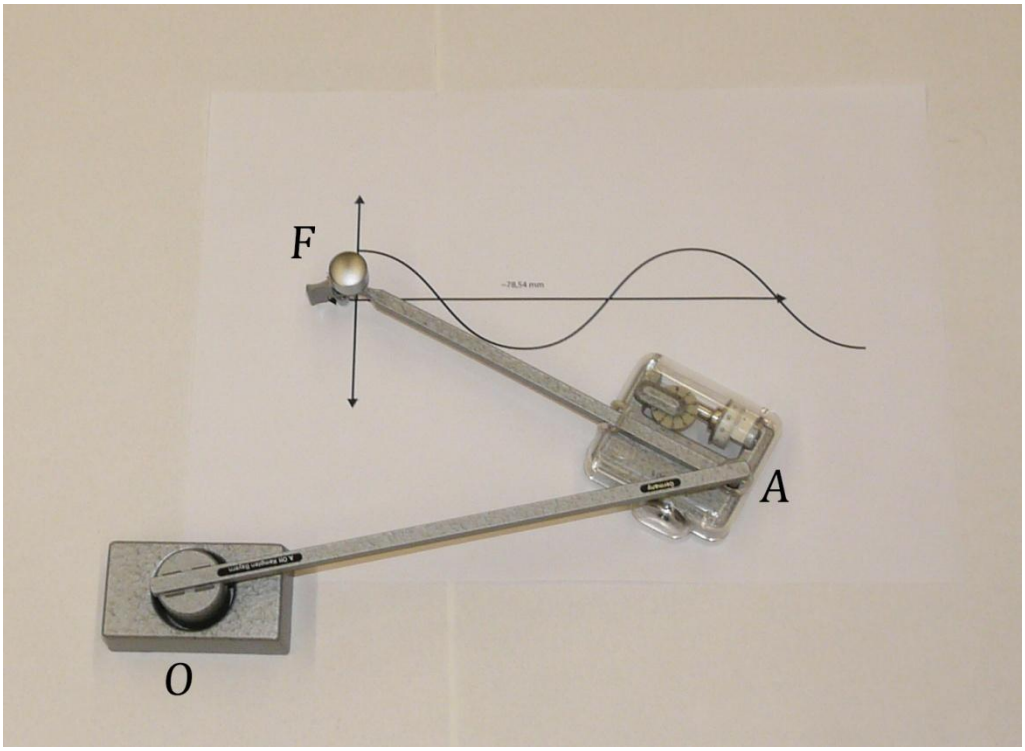

Bild 30: Polarplanimeter.

Das Polarplanimeter dient wie alle Planimeter der Bestimmung eines Integrals. Fährt man mit dem Gerät eine gegebene geschlossene, zweidimensionale Kurve ab, so kann man anschließend auf der Messrolle den Flächeninhalt des umfahrenen Bereichs ablesen.

Das Planimeter besteht aus einem Gewicht O, einem Polarm OA, einem Fahrarm AF und einer Messrolle, die an dem Fahrarm befestigt ist und senkrecht zu diesem abrollt. Das Gewicht O dient als fester Punkt und als Pol, in den der Polarm OA eingesetzt wird, so dass OA um O rotieren kann. Der Fahrarm AF wird wiederum am anderen Ende A des Polarms eingesetzt und kann um dieses Ende rotieren.

Will man nun mit dem Polarplanimeter den Flächeninhalt eines zweidimensionalen Gebiets bestimmen, so baut man das Planimeter wie oben beschrieben zusammen und setzt das Ende F des Fahrarms, das nicht am Polarm befestigt

ist, an einem beliebigen Punkt auf dem Rand des Gebiets an. Man notiert sich den Wert auf der Messrolle und fährt mit dem Punkt F des Fahrarms den Rand des Gebiets ab, bis man wieder an dem Punkt angekommen ist, an dem man angesetzt hat. Schließlich liest man auf der Messrolle erneut den Wert ab, berechnet die Differenz der beiden Werte und multipliziert sie mit einer festen Zahl die der Bedienungsanleitung zu entnehmen ist (der so genannten *Gerätekonstanten*). Das Ergebnis dieser Rechnung ist der Flächeninhalt.
In zwei Spezialfällen erhält man ein leicht anderes Ergebnis:
Befindet sich der Großteil der zu bestimmenden Fläche innerhalb des Kreises, den der Polarm schlägt, erhält man durch das obige Verfahren den Flächeninhalt mit *negativem Vorzeichen*.
Liegt der Kreis, den der Polarm schlägt, komplett im Inneren der Fläche, die man bestimmen will, so erhält man nach obigem Verfahren den Flächeninhalt *abzüglich des* Flächeninhaltes des *Polarm-Kreises*.

Die Gerätekonstante beträgt

$$K = 17 \cdot \frac{2\pi}{100} = \frac{66}{100}\pi = 1{,}06814 \ldots$$

Ein Noniusteil entspricht also ungefähr einer Fläche von einem Quadratzentimeter.

3.5.2. Wirkweise

Ausführungen zu dem Polarplanimeter findet man bei Blümich (o.J.); Willers (1951), S. 138ff. und Meyer zur Cappelen (1949), S. 185ff. Bezug genommen wird in dem Kapitel aber nur auf das Kapitel »Grund-Linearplanimeter«, welches wiederum auf Blümich referenziert.

Um die Wirkweise des Polarplanimeters zu verstehen, betrachtet man zunächst die Wirkweise des Linearplanimeters (vgl. Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«). Das Polarplanimeter funktioniert genauso wie das Linearplanimeter, nur dass sich der Fahrarm nicht auf einer Gerade bewegt, sondern auf einem Kreis um den Pol O. Im Folgenden wird gezeigt, dass es grundsätzlich keinen Unterschied macht, ob sich der Fahrarm auf einer Geraden, einem Kreis oder einer anderen Kurve bewegt. Als Kurve kann eine beliebige stück-

weise glatte, stetige Kurve herangezogen werden, die es in Kombination mit dem Fahrarm erlaubt, die Funktion abzufahren, die man abfahren will – also auch ein Kreis.

Noch einmal kurz der Aufbau eines solchen allgemeinen Umfahrungsplanimeters:

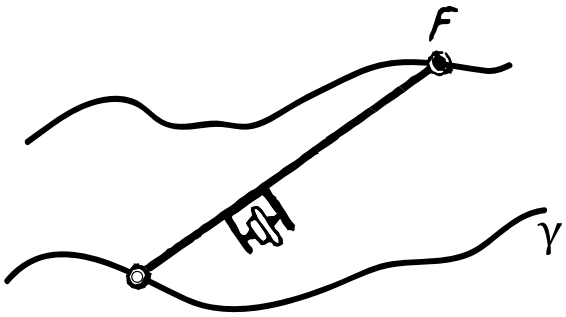

Bild 31: Allgemeines Umfahrungsplanimeter.

Gegeben ist ein Fahrarm, dessen eines Ende sich auf einer beliebigen stückweise glatten, stetigen Kurve γ bewegt. An dem anderen Ende des Fahrarms befindet sich ein Fahrstift F. An dem Fahrarm ist eine Messrolle angebracht, die senkrecht zu diesem abrollt.
Zu zeigen ist:

> Fährt man mit diesem Fahrstift den Rand eines Gebiets ab, kann man an der Messrolle den Flächeninhalt des Gebiets ablesen.

Bekannt ist, dass für den Fall, dass γ eine Gerade ist, das Umfahrungsplanimeter den Flächeninhalt des umfahrenen Gebiets bestimmt (vgl. den Beweis aus dem Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«). Auf diesen speziellen Fall führen wir jetzt den allgemeinen zurück.
Im Folgenden sei γ keine Gerade sondern ein Polygon vom Grad n. Beginnen wir mit einem Polygon vom Grad 2, also zwei Strecken, die in einem ihrer Endpunkte verbunden sind und in einem bestimmten Winkel zueinander stehen. Eine Strecke heißt a, die andere b und der Verbindungspunkt wird mit P benannt. Außerdem sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet G mit Rand gegeben, dessen Flächeninhalt bestimmt werden soll. Ich beschränke mich hier auf den Fall, dass der Fahrarm auf γ den Punkt P überschreiten muss, um den Rand des Gebietes abzufahren. In allen anderen Fällen bewegt sich der Fah-

rarm nur auf einer Gerade und es kann die Argumentation des Linearplanimeters angewandt werden. Es sei also so, dass der Punkt P vom Fahrarm auf γ passiert werden muss.

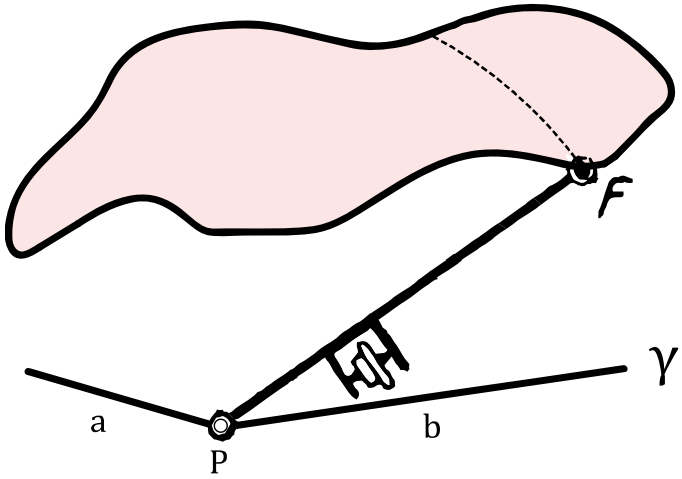

Bild 32: Umfahrungsplanimeter mit γ als Linienzug. Der Schnitt-Kreisbogen, den man erhält, wenn man das Gebiet mit einem Kreis um den Punkt P mit der Länge des Fahrarms schneidet, ist gestrichelt eingezeichnet.

Nun kann um den Punkt P ein Kreis gezogen werden, dessen Radius dieselbe Länge hat, wie der Fahrarm. Weil mit dem Fahrarm jeder Punkt des Randes erreicht werden kann, schneidet der Kreis das Gebiet. Dieser Schnitt-Kreisbogen markiert eine Grenze. Bei dem Abfahren der Gebiets-Randpunkte auf der einen Seite des Kreisbogens befindet sich das andere Ende des Fahrarms, das auf dem Polygon läuft, ausschließlich auf einer der Strecken a und b und überschreitet nicht den Punkt P. Auf der anderen Seite des Kreisbogens befindet sich das Ende dann auf der jeweils anderen Strecke b bzw. a.

Solche Schnittkreisbögen lassen sich auch bei Polygonen höherer Ordnung zeichnen. Anhand dieser Schnitt-Kreisbögen kann man das Gebiet nun in kleinere Gebiete aufteilen, die sich jeweils untereinander nur an den beschriebenen Kreisbögen schneiden. Wenn man diese Gebiete mit dem Planimeter umfährt, bewegt sich der Fahrarm ausschließlich auf einer Geraden. Das Planimeter bestimmt also den Flächeninhalt der Gebiete. Wenn man die Gebiete nun nacheinander abfährt, so merkt man, dass man die Kreisbögen, an denen man vorher das große Gebiet getrennt hat, immer zweimal abfährt, nämlich einmal in die eine und einmal in die andere Richtung. Da das Abfahren des Kreisbogens nur einer Drehung des Fahrarms entspricht, heben sich die Bewegungen in die eine und die andere Richtung gegenseitig in ihrem Einfluss auf die Messrolle

auf. Damit kann man die Bewegungen über die Kreisbögen auch einsparen und übrig bleibt die Bewegung über den Rand des ursprünglichen Gebiets. Dieses Verfahren lässt sich natürlich nicht nur bei Polygonen 2. Ordnung anwenden, sondern lässt sich auf Polygone beliebiger Ordnung verallgemeinern. Als γ kann also ein beliebiges Polygon genommen werden. Weil nun jede stückweise glatte, stetige Kurve unendlich genau durch ein Polygon angenähert werden kann, kann auch jede stetige Kurve als γ genommen werden – also auch ein Kreis.

q.e.d.

3.6. Linear-Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung

3.6.1. Zweck

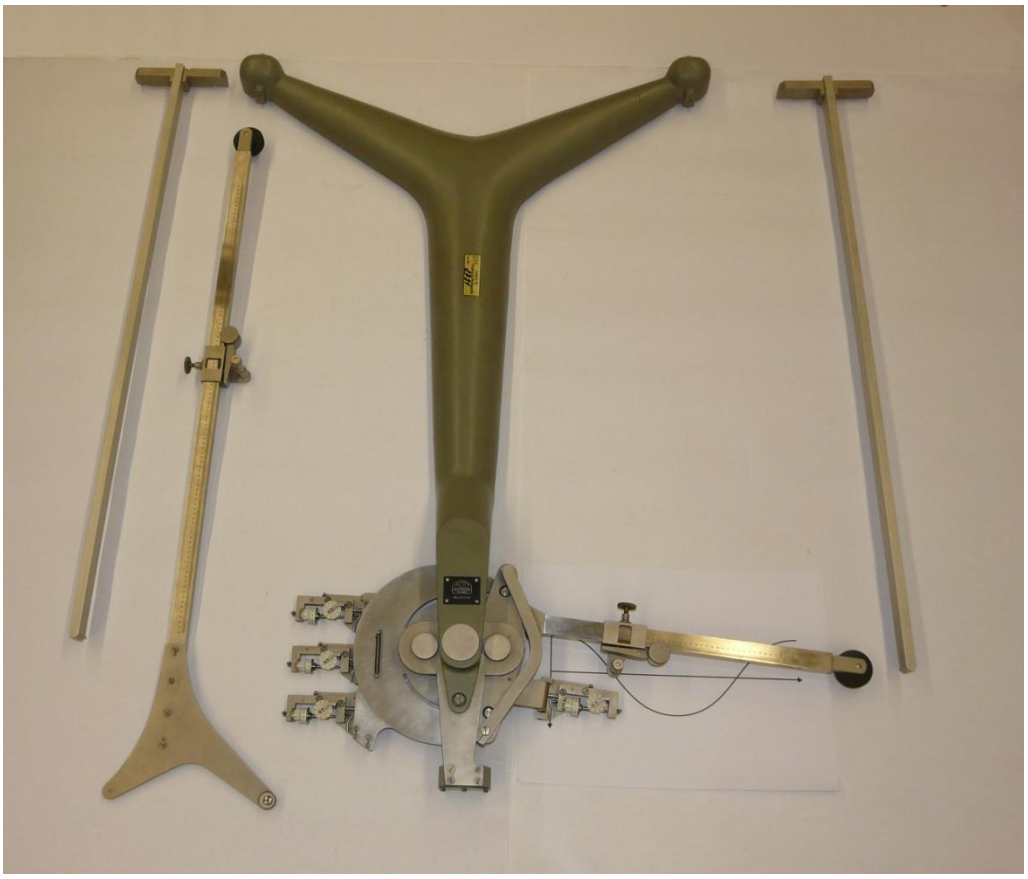

Bild 33: Linear-Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung. Rechts und links die Distanzstäbe, ebenfalls links: Der längere Fahrarm. Die Leitschiene fehlt.

Das Linear-Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung kann durch das Abfahren einer stetigen, geschlossenen, zweidimensionalen Kurve die Integrale $\int y(x)^1\,dx$ bis $\int y(x)^4\,dx$ der Kurve gleichzeitig bestimmen[16].

Dadurch lässt sich mit dem Gerät neben denselben Anwendungen wie bei dem kombinierten Grund- und Quadrat-Linearplanimeter (Flächenbestimmung, Schwerpunktbestimmung, Rotationsvolumen, Erwartungswert und Effektivwert) z.B. auch noch das Flächenträgheitsmoment bestimmen. Damit kann man

[16] Wie bei dem Grund- und Quadrat-Linearplanimeter. Teilt man die geschlossene Kurve in zwei Funktionsgraphen von Funktionen f und g auf, die in dem Koordinatensystem übereinander liegen und in den Endpunkten ineinander übergehen, dann bestimmt das Gerät das Integral $\int y^n dx = \int f(x)^n - g(x)^n dx$.

Aussagen über die Steifheit eines Balkens treffen, der die Fläche als Querschnittsfläche hat. Auch über die Festigkeit eines solchen Balkens kann man Schlussfolgerungen treffen, indem man auf Grundlage des Flächenträgheitsmoments den Widerstandsmoment errechnet.
Das Flächenträgheitsmoment um die y-Achse bestimmt sich nach der Formel

$$\int y^2\, dx\, dy = \int y^2\, dy\, dx = \frac{1}{3}\int y^3 dx,$$

dasjenige um die x-Achse nach

$$\int x^2\, dx\, dy = \frac{1}{3}\int x^3 dy.$$

Auch das Trägheitsmoment eines Umdrehungskörpers lässt sich mit dem Gerät leicht bestimmen. Es bestimmt sich nach der Formel

$$\frac{\pi}{2}\int y^4 dx,$$

falls die x-Achse als Rotationsachse gewählt wurde.

3.6.2. Aufbau

Das Gerät besticht durch seine einfache Form. Es besteht lediglich aus einer Leitschiene, einem Wagen, an dem die vier Messrollen angebracht sind, und einem Fahrarm, mit dem der Graph der Funktion abgefahren wird. Die einzelnen Messrollen lassen sich dabei nach oben klappen, wenn sie nicht benötigt werden. Für das Gerät gibt es einen kürzeren und einen längeren Fahrarm, die, je nachdem, ob eine kleinere oder eine größere Figur abgefahren werden soll, gegeneinander getauscht werden können und in der Länge verstellbar sind.
Der genaue Aufbau, auch von der Unterseite des Fahrwagens, wird unter »Wirkweise« beschrieben.

3.6.3. Anwendung

Um die Integrale zu bestimmen, muss zunächst der Graph der abgefahren werden soll, in einer Größe vorliegen, in der jeder der Punkte durch einen der beiden Fahrarme erreichbar ist. Die Leitschiene muss aufgebaut, der Wagen in die Schiene und der Fahrarm in den Wagen eingehängt werden. Dabei ist wie oben

beschrieben darauf zu achten, dass jeder Punkt der Kurve durch den Fahrarm erreichbar ist. Wie bei dem Grund- und Quadrat-Linearplanimeter bestimmt die Position des Geräts darüber, wo das Koordinatensystem liegt, in dem die Integrale bestimmt werden (Vgl. Kapitel 3.3.1 »Zweck« und 3.3.3 »Anwendung«). Man richtet die Maschine mithilfe der beiden beiliegenden Distanzstäbe aus (in Bild 33 ganz links und rechts). Die Gerade, auf der die beiden Spitzen der Distanzstäbe liegen, ist bei den Berechnungen die x-Achse. Die y-Achse steht senkrecht dazu.

Anschließend müssen die Messrollen herunter geklappt werden, welche die gesuchten Integrale bestimmen. Man setzt den Fahrarm auf der Kurve an, notiert die Werte der Messrollen und fährt die Kurve im Uhrzeigersinn ab. Schließlich notiert man erneut den Wert der Rollen, berechnet die Differenz und nimmt die erhaltenen Zahlen jeweils mit einer Konstante mal, die für jedes Integral und jede Fahrarmlänge unterschiedlich sein kann und in der Geräteanleitung angegeben ist. Das Ergebnis dieser Rechnung ist das gesuchte Integral.

3.6.4. Wirkweise

Obwohl das Gerät einen so scheinbar einfachen Aufbau hat, verbergen sich auf der Unterseite des Wagens wichtige Details. Dort befinden sich mehrere Metallplatten, die so geformt sind, dass sich zwei Zapfen auf einer bestimmten Kurve (»Gleitkurve«) durch sie Bewegen können. An ihnen sind auch die Messrollen angebracht. Für jede Messrolle gibt es eine Metallplatte bzw. Kurve. Die Zapfen wiederum sitzen auf einer anderen Metallplatte, die durch das Bewegen des Fahrarms gedreht wird.

Kausal ergibt sich folgendes Bild:

Der Fahrarm wird bewegt, dadurch dreht sich die Metallplatte mit den Zapfen, die an dem Fahrarm angebracht ist. Diese Zapfen drehen sich dabei durch die anderen Metallplatten und ihre Gleitkurven. Bei dem Bewegen durch die Gleitkurven und durch den leichten Druck der Zapfen verschieben sich die Metallplatten, damit die Zapfen sich weiter durch die Kurven bewegen können. Diese Bewegung der Metallplatten überträgt sich auf die an ihnen angebrachten Messrollen, welche dann das gewünschte Ergebnis liefern.

Die Funktionsweise des Linear-Potenzplanimeters mit Kurvensteuerung ist relativ komplex, weshalb zuerst zwei andere Geräte betrachtet werden, die grundsätzlich genauso funktionieren, aber einfacher aufgebaut sind.

Die folgenden Darstellungen basieren auf Willers (1951), S. 166ff., sind jedoch etwas ausführlicher, nehmen keinen Bezug auf den Leibnitz'schen Differentialbegriff und korrigieren einen Fehler, den Willers übersehen haben muss[17]. Vgl. auch die Ausführungen von Meyer zur Cappelen (1949), S. 203ff.

3.6.4.1. Momentplanimeter von Lorenz

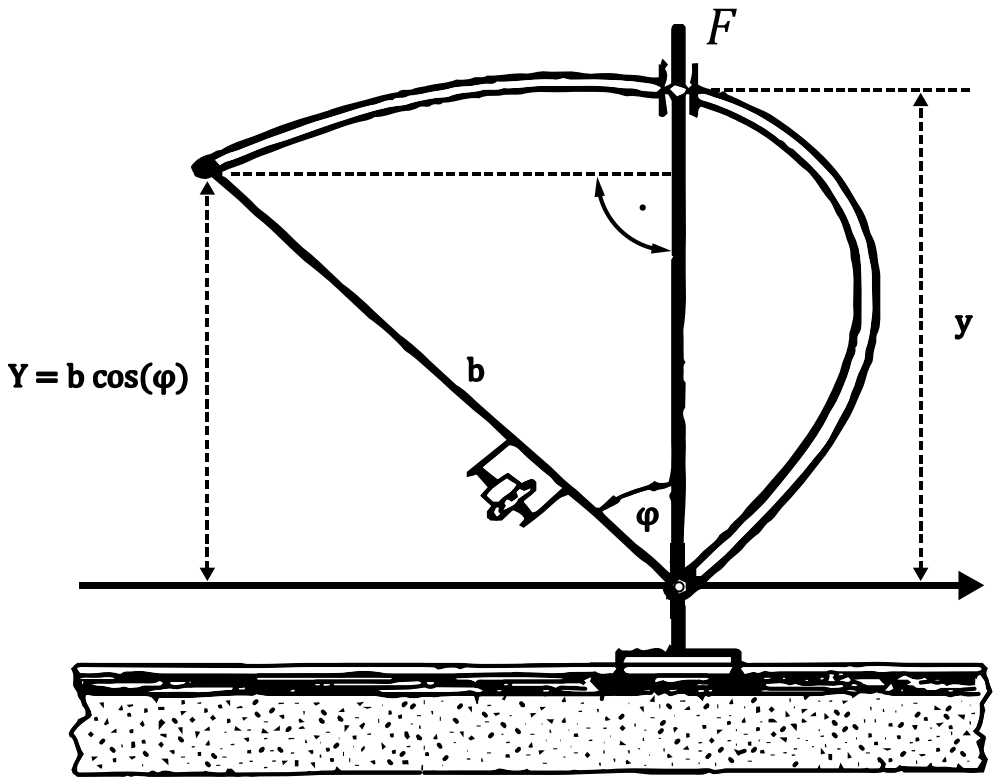

Bild 34: Momentplanimeter von Lorenz[18].

Das Momentplanimeter von Lorenz hat auch einen Wagen, der in einer Leitschiene läuft (als schwarzer Strich angedeutet). Die Kurve, die integriert werden soll, wird dabei mit dem Fahrstift *F* abgefahren. Anders als bei den anderen Maschinen in dieser Arbeit, ist der Fahrstift bei diesem Gerät *nicht* an der Spitze eines Armes angebracht. Der Fahrstift lässt sich sowohl vertikal auf dem Wagen verschieben, als auch horizontal, durch Bewegen des Wagens. Auf der

[17] Willers kommt auf die Formel $y = b \cdot \sqrt[n]{\cos(\varphi)}$ wohingegen ich auf $y = \sqrt[n]{\mathrm{b} \cdot \cos(\varphi)}$ komme.

[18] Um welchen Lorenz es sich hier handelt, konnte ich leider nicht herausfinden.

Rückseite des Fahrstifts, nach oben gerichtet, befindet sich ein Zapfen, der in einer Gleitkurve läuft, die in der Zeichnung weiß mit schwarzen Rändern angedeutet ist und von dem Arm mit der Länge b gehalten wird. Beim Bewegen von F nach unten dreht sich der Arm mit der Gleitkurve gegen den Uhrzeigersinn, beim Bewegen nach oben im Uhrzeigersinn. Der Winkel φ bezeichnet den Winkel, den der Arm mit der Länge b gegen den Wagen hat. Außerdem wird der Höhenabstand von F zu dem Drehpunkt, in dem der Arm eingehängt ist, mit y angegeben.

Dieses Gerät soll nun also ein Integral $\int y(x)^n dx$ bestimmen. Wie funktioniert das?

Zunächst ist wieder auffällig, dass wir es mit einem Arm zu tun haben, an dem eine Messrolle angebracht ist, die senkrecht zu diesem abrollt. Der Arm ist auch wieder auf einem Wagen befestigt, der linear läuft. Bis hierhin verhält sich alles wie bei dem Linearplanimeter. Dieses hat jedoch keine Gleitkurve und man fährt bei dem Planimeter von Lorenz die zu integrierende Kurve nicht mit der Armspitze ab. Alles andere kennen wir schon von dem Linearplanimeter (vgl. Kapitel 3.3.4.1). Allein aus dieser Überlegung heraus ergibt sich also, welchen Wert die Messrolle bestimmt, wenn man mit dem Gerät eine geschlossene stetige Kurve abfährt, nämlich den Flächeninhalt des Gebiets, das die Spitze des Armes mit der Länge b umfährt. Die Spitze des Arms soll sich also immer den Höhenabstand y^n von der x-Achse haben. Da die Höhe Y der Armspitze von der Form der Gleitkurve abhängt, gilt es zu zeigen, dass es eine Gleitkurve gibt, die so geformt ist, dass $Y = y^n$ ist, wenn sich der Fahrstift gerade in der Höhe y befindet.

Es soll also $Y = y^n$ gelten. Umformuliert bedeutet das nichts anderes als

$$y = \sqrt[n]{Y} = \sqrt[n]{b \cdot \cos(\varphi)}.$$

Das ist die Gleichung für unsere Gleitkurve.

F bewegt sich immer in dieser Kurve, dadurch ist immer $Y = y^n$ und damit bestimmt das Planimeter $\int y(x)^n dx$.

3.6.4.2. Potenzplanimeter mit Nockensteuerung

Nun zurück zu unserem ursprünglichen Gerät von Ott. Bei dem Gerät von Ott fahren wir die Kurve mit einem Fahrarm ab. Dieser Fahrarm bewegt die Metallplatte mit den Zapfen, welche wiederum die Metallplatte mit der Gleitkurve bewegen, an der die Messrolle befestigt ist. Die ganze Apparatur wiederum läuft in einer Leitschiene.

Wir betrachten noch ein letztes Mal eine andere, ähnliche Maschine, von der sich gleich herausstellen wird, dass sie genau so funktioniert, wie das Gerät von Ott:

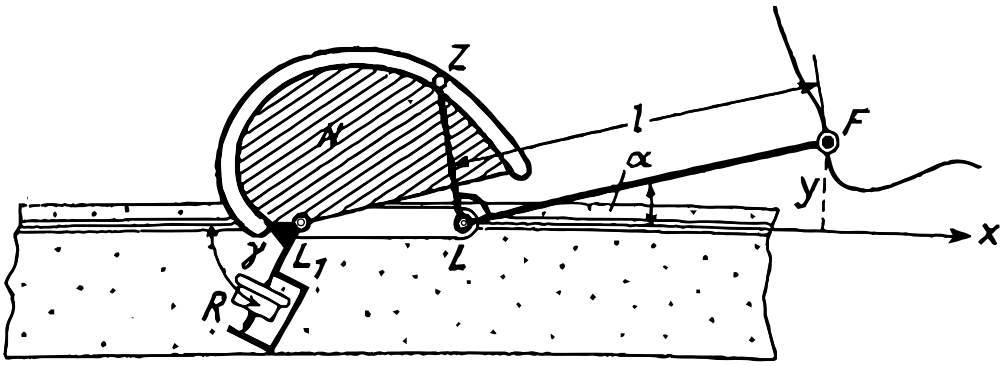

Bild 35: Potenzplanimeter mit Nockensteuerung.

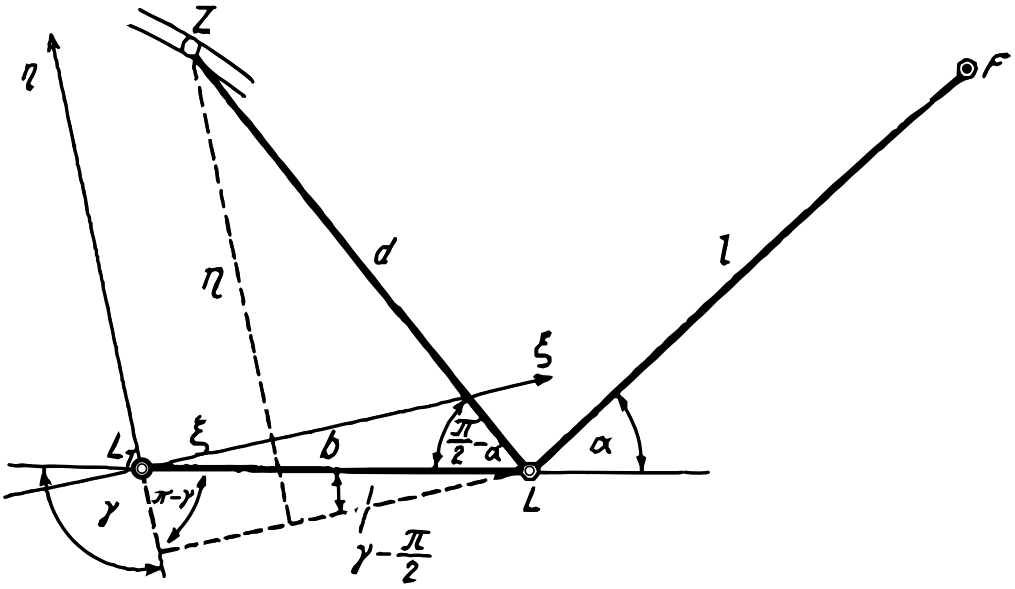

Bild 36: Potenzplanimeter mit Nockensteuerung – Schematische Zeichnung.

Auch diese Maschine läuft in einer Leitschiene. Es gibt einen Fahrarm l, der Teil eines Winkelhebels ist. Ein Winkelhebel sind zwei Arme l und d, die sich um ihren Befestigungspunkt L drehen können und dabei immer senkrecht zuei-

nander stehen. Der Drehpunkt L des Winkelhebels befindet sich auf dem Wagen, der in der Leitschiene gleitet. Das Ende Z des kleineren Arms d des Winkhelhebels läuft in einer Gleitkurve. Die Gleitkurve wiederum ist auf einer Metallplatte N (»Nockenscheibe«) befestigt, die sich um den Punkt L_1 – ebenfalls auf dem Wagen – drehen kann. Auch von dem Punkt L_1, verbunden mit der Metallplatte N, geht ein kleiner Arm mit der Messrolle R aus. Der Arm mit der Messrolle ist in einem festen Winkel an die Metallplatte N angebracht und dreht sich mit dieser um den Drehpunkt L_1. Den Winkel zwischen der Leitschiene und dem Arm mit der Messrolle nennen wir γ. Der Winkel zwischen dem Fahrarm LF und der Leitschiene nennen wir α.

Wie bei der letzten Maschine stellt sich nun die Frage, was das für eine Gleitkurve auf der Metallplatte N ist.
Betrachten wir zunächst nur das obere Bild (35) und hier speziell das Dreieck, bestehend aus dem kleinen Arm mit der Messrolle R, der Leitschiene und der Lotgeraden durch die Spitze des kleinen Arms auf die Leitschiene. Stellen wir uns nun vor, der kleine Arm hätte die Länge k. Dann könnte man den Abstand Y von der Spitze dieses Armes zur Leitschiene durch

$$Y = k \cdot \sin(\gamma)$$

angeben.
Es ist also wieder zu zeigen: Es gibt eine Gleitkurve, so dass $Y = y^n$ ist, wenn sich der Fahrstift F in der Höhe y befindet. Das ist aber genau dann der Fall, wenn

$$(*) \qquad k \cdot \sin(\gamma) = l^n \cdot \sin^{\mathrm{n}}(\alpha)$$

ist. Dann ist nämlich

$$Y = k \cdot \sin(\gamma) = l^n \cdot \sin^{\mathrm{n}}(\alpha) = l^n \cdot \left(\frac{y}{l}\right)^n = y^n.$$

Mithilfe der Gleichung $(*)$ können wir nun die benötigte Gleitkurve berechnen: Betrachte nun das untere Bild (36) und im speziellen ein kartesisches ξ-η-Koordinatensystem dessen Ursprung im Drehpunkt der Metallplatte L_1 liegt und dessen η-Achse auf dem Arm liegt, an dem die Messrolle R befestigt ist.
Im Bild sind schon einige Winkel angegeben. Bedeutsam sind die Winkel $\pi - \gamma$ und die Summe der Winkel $\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \gamma - \alpha$.

Hat man diese Winkel im Auge, kann man leicht ablesen:

$$\xi = b \cdot \sin(\pi - \gamma) - d \cdot \cos(\gamma - \alpha),$$
$$\eta = d \cdot \sin(\gamma - \alpha) - b \cdot \cos(\pi - \gamma).$$

Wegen den Eigenschaften

$$-sin(x) = sin(-x),$$
$$cos(x) = cos(-x)$$

und

$$\begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}(x + \pi) = -\begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}(x)$$

der trigonometrischen Funktionen lassen sich diese Terme vereinfachen:

$$\xi = b \cdot \sin(\gamma) - d \cdot \cos(\gamma - \alpha),$$
$$\eta = b \cdot \cos(\gamma) + d \cdot \sin(\gamma - \alpha).$$

Und weiter mit den Additionstheoremen:

$$\xi = (b - \sin(\alpha)) \cdot \sin(\gamma) - d \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma),$$
$$\eta = (b - \sin(\alpha)) \cdot \cos(\gamma) + d \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma).$$

Nun haben wir eine Form erreicht, in der sich unsere Gleichung $(*)$ einsetzen lässt.

Außerdem kann man auch die Gleichung

$$(*) \Leftrightarrow k \cdot \cos(\gamma) = l^n \cdot \cos^{\mathrm{n}}(\alpha)$$

einsetzen.

Damit sind ξ und η nur noch von α abhängig und somit eindeutig bestimmt. Die Gleitkurve lässt sich also punktweise berechnen und maschinell herstellen.

Damit ist gezeigt, wie das Potenzplanimeter mit Nockensteuerung funktioniert. Indem solche Kurven als Gleitkurven verbaut werden, bestimmt das Planimeter das Integral $\int y^n \, dx$.

3.6.4.3. Linear-Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung

Nun bleibt noch zu zeigen, dass das Gerät, um welches es eigentlich geht, nämlich das Linear-Potenzplanimeter mit Kurvensteuerung von Ott, auf dieselbe Weise erklärbar ist.

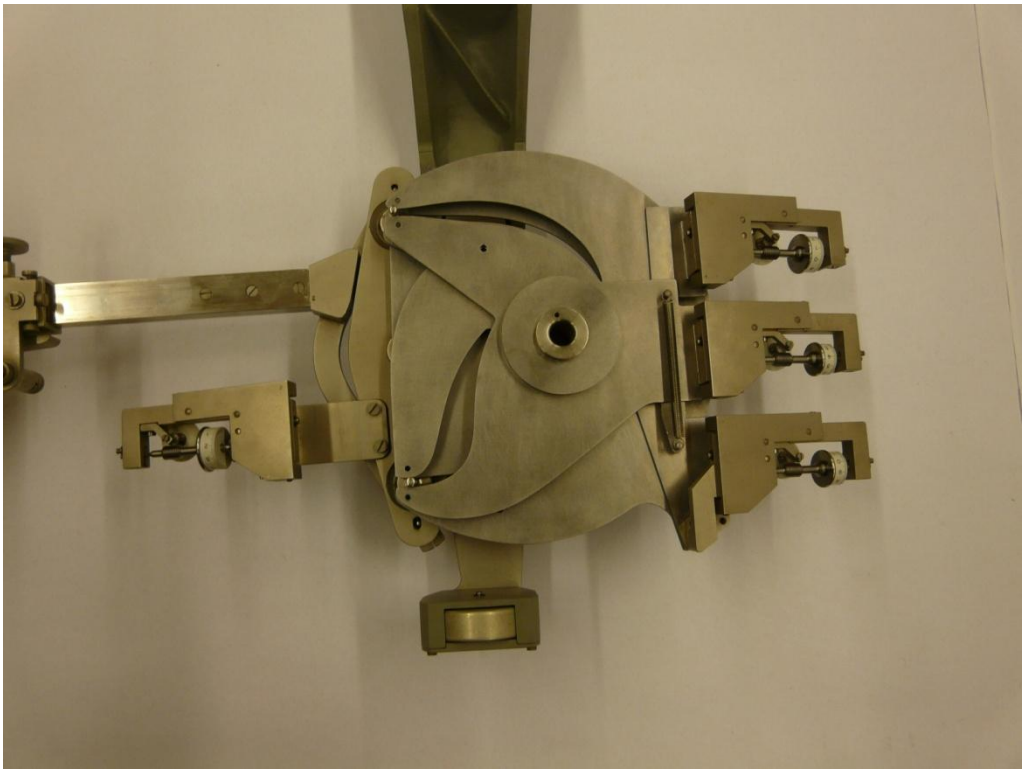

Bild 37: Unterseite des Linear-Potenzplanimeters mit Kurvensteuerung.

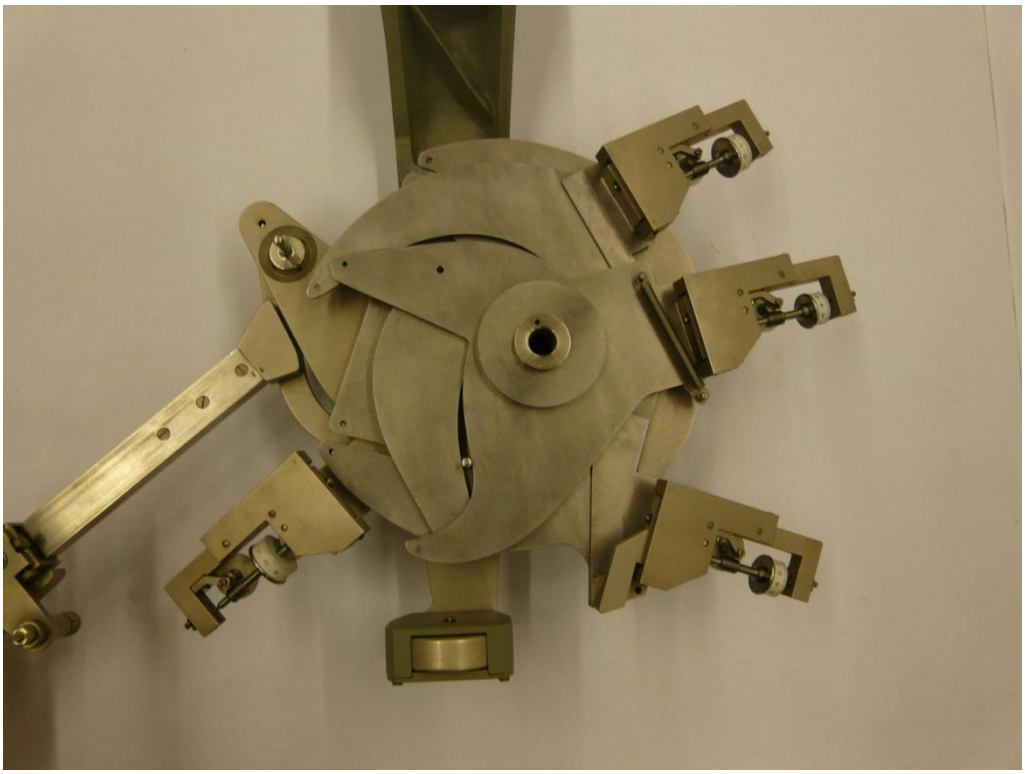

Bild 38: Unterseite des Linear-Potenzplanimeters mit Kurvensteuerung bei einer Bewegung. Der Fahrstift F befindet sich im Bild ganz links unten.

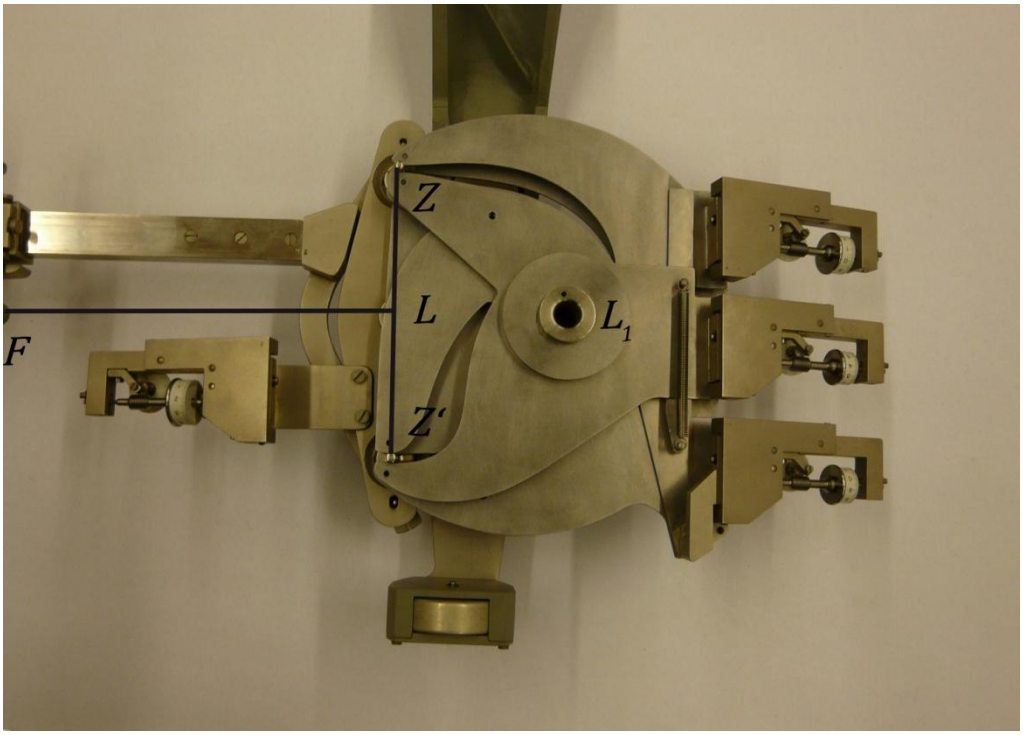

Bild 39: Bild 37 im Kontext von Bild 35. Links ist der Fahrarm FL zu sehen, der Teil zweier Winkelhebel ist. Z und Z' sind Zapfen, L_1 der Drehpunkt der Metallplatten.

Auch das Gerät von Ott hat zwei Drehpunkte L und L_1, die auf einem Wagen in der Leitschiene und damit auf der x-Achse fahren. In L_1 drehen sich, wie bei dem Potenzplanimeter mit Nockensteuerung, die Metallplatten mit den Gleitkurven. Hier gibt es also keinen Unterschied[19]. L ließe sich tatsächlich als Drehpunkt eines Winkelhebels interpretieren. Der Fahrarm endet am Punkt L und von dort aus geht ein Arm zu einem Zapfen, welcher sich wiederum in der Gleitkurve bewegt und auf diese Kraft ausübt (vgl. Bild 39). Dass von dem Punkt L quasi zwei Arme abgehen, die zu unterschiedlichen Zapfen Z und Z' führen, ist nicht relevant. In der Gleitkurve befindet sich immer nur genau ein Zapfen, während sich der andere nicht auf die Metallplatte mit der Gleitkurve auswirkt. Die Gleitkurven der beiden Zapfen Z und Z' gehen dann stetig ineinander über, an der Stelle, an der sich der Zapfen in der Kurve befinden würde, wenn der Fahrarm senkrecht stünde. Es gibt also, genau wie bei dem Potenzplanimeter mit Nockensteuerung, einen Fahrarm, einen Winkelhebel, eine Metallplatte und eine Gleitkurve.

Zuletzt ist noch der kleine Arm mit der Messrolle zu prüfen. Anders als bei dem letzten Gerät ist der Arm mit der Messrolle nicht an dem Punkt L_1

[19] Da die Kurven nicht formschlüssig als Schlitze ausgebildet sind, wird der Kraftschluss durch die auf den Bildern sichtbaren Feder erreicht.

angebracht, sondern an der Metallplatte mit der Gleitkurve. Trotzdem dreht er sich zusammen mit der Metallplatte um den Punkt L_1.

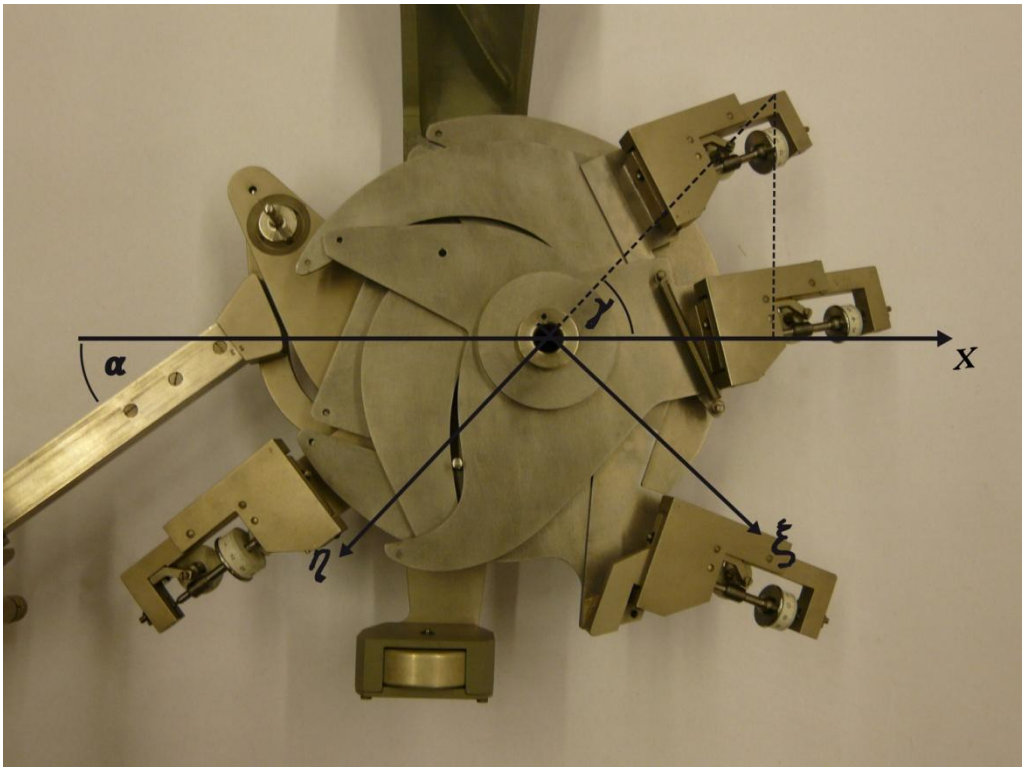

Bild 40: Bild 38 im Kontext von Bild 36. Beispielhaft für eine Messrolle und eine Gleitkurve. Die x-Achse geht durch die Drehpunkte L und L_1.

Man stelle sich nun das rechtwinklige Dreieck von L_1, der Spitze des Arms mit der Messrolle und dem Lotpunkt dieser Spitze auf der x-Achse vor (vgl. Bild 40). Den Winkel zwischen der x-Achse und der Strecke von L_1 zu der Armspitze wollen wir γ nennen. Der Abstand von der Armspitze zum Lotpunkt soll Y heißen. k sei die Länge der Strecke von L_1 zu der Armspitze. Dann ist die Hypotenuse in diesem Dreieck immer gleich lang, unabhängig davon, wie sich die Winkel α und γ ändern, nur Y ändert sich. Man kann hier also dieselbe Argumentation wie oben anwenden und eine eindeutig bestimmte Gleitkurve finden. Man platziert wieder ein ξ-η-Koordinatensystem am Punkt L_1, so, dass die η-Achse durch die Armspitze verläuft und geht auch sonst wie oben vor. Man erhält also eine Gleitkurve, die bewirkt, dass der Abstand der Spitze des Arms mit der Messrolle Y immer genau y^n beträgt. Damit ist gesichert, dass man später auf der Messrolle einen Wert proportional zu $\int y^n dx$ ablesen kann, auch wenn sich der Arm mit der Messrolle nicht mehr auf der x-Achse bewegt. Denn nach Kapitel 3.5.4 »Polarplanimeter« und der allgemeinen

Planimetertheorie wissen wir, dass sich der Arm auf einer beliebigen stetigen Kurve bewegen kann.
Wir haben also gezeigt, dass es eine Gleitkurve gibt, so dass die Höhe Y der Armspitze des Arms, an dem die Messrolle befestigt ist, gleich y^n ist.

q.e.d.

Da die Länge k frei wählbar ist und die Fahrarmlänge l bei dem Modell von Ott verstellbar ist, nehme ich an, dass $k = l^n$ gewählt wurde. Damit würde die Gerätekonstante K von der Fahrarmlänge l abhängen. Die Gerätekonstante K bestimmt, wie vielen cm^{n+1} ein Noniusteil auf der Messrolle entspricht. Durch die Wahl einer sehr kurzen Fahrarmlänge würde sich dann also die Genauigkeit erhöhen.
Das ergibt auch deshalb Sinn, weil in den dem Gerät beiliegenden Tabellen einige Noniusteile *in Abhängigkeit von der Fahrarmlänge* in cm^{n+1} umgerechnet wurden. Außerdem schreiben Willert und Meyer zur Cappelen von der Formel $\sin(\gamma) = \sin^{\mathrm{n}}(\alpha)$ und nicht von $k \cdot \sin(\gamma) = l^n \cdot \sin^{\mathrm{n}}(\alpha)$ [20]. Auch das lässt auf die Beziehung $k = l^n$ schließen.
Allerdings konnte ich diese Gleichung bisher nicht an dem Gerät verifizieren. Eine Bedienungsanleitung liegt mir nicht vor. Deshalb habe ich in diesem Kapitel auch nicht angegeben, wie der Nonius in cm^{n+1} umgerechnet werden kann. Dies kann eine Aufgabe für weitere Untersuchungen sein. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass bei diesem Gerät einerseits die Skala auf den Fahrarmen nicht metrisch ist und andererseits der Messrollen-Radius bei den einzelnen Rollen variiert.

[20] Vgl. Willers (1951), S. 167 und Meyer zur Cappelen (1949), S. 205.

3.7. Stieltjes-Planimeter

3.7.1. Zweck

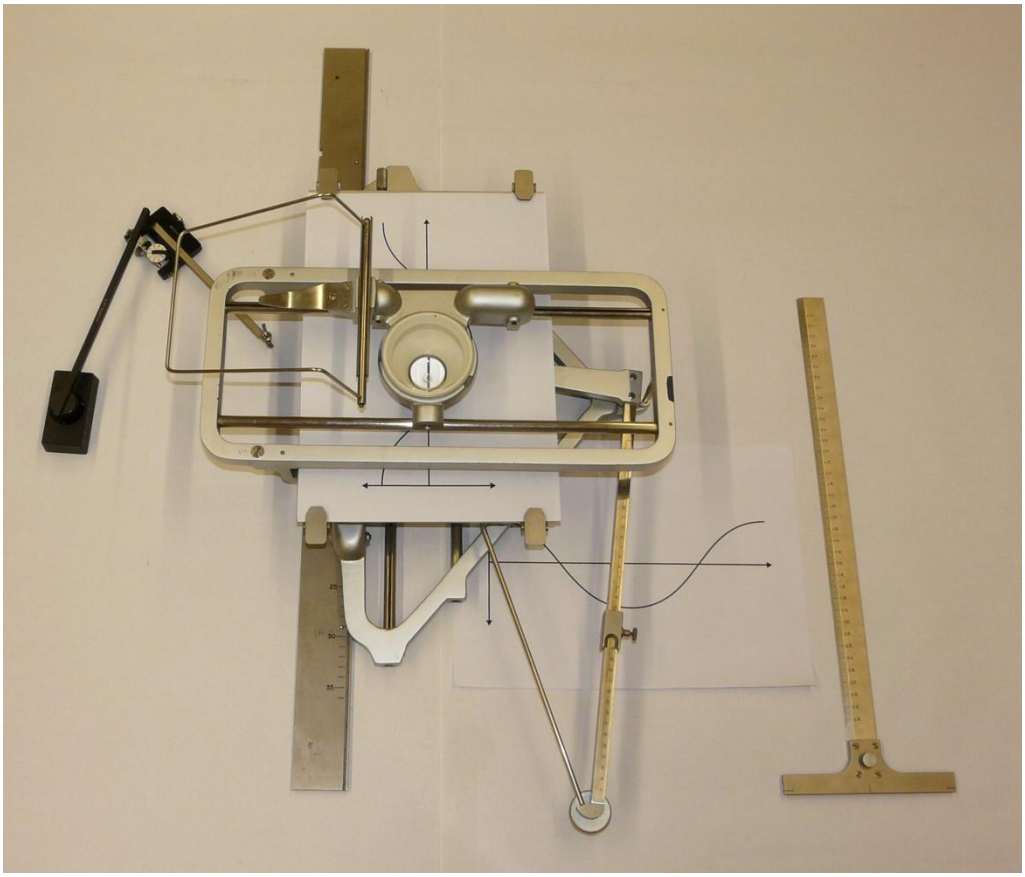

Bild 41: Stieltjes-Planimeter. Das Holzpodium links unter dem Polarplanimeter fehlt bei dem Gerät leider. Vgl. das vollständige Bild bei Meyer zur Cappelen (1949), S. 210.

Das Stieltjes-Planimeter kann Stieltjes-Integrale berechnen, d.h. Integrale der Form

$$\int f(x)\, dg(x) := \int f(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Um das Gerät benutzen zu können benötigt man eine Zeichnung der Graphen der Funktionen f und g in einer passenden Größe, sowie zwei Personen, die das Gerät bedienen. Das Gerät alleine zu bedienen ist auch möglich, jedoch nur mit besonderen Metallkurven, die dem Gerät nicht beiliegen, sondern als Spezialanfertigung hergestellt werden müssen. Das Stieltjes-Integral wird durch gleichzeitiges Abfahren der Graphen von f und g bestimmt. Nähere Informationen sind unter »Anwendung« aufgeführt.

Stieltjes-Integrale kommen beispielsweise in der Physik vor, wenn über ein Intervall zu Integrieren ist, das ungleichmäßig mit Masse, Druck, Helligkeit oder Elektrizität belegt ist[21].
Sie spielen aber auch in Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Rolle. Der Erwartungswert

$$E\big(f(X)\big) = \int f(x)\, dg(x)$$

einer Funktion f von einer Zufallsvariable X mit der Dichte g ist ein Stieltjes-Integral.
So lassen sich beispielsweise beliebige Momente einer Zufallsvariable, wie Erwartungswert, Varianz, Schiefe oder Wölbung bestimmen.
Viele Integrale in der Analysis lassen sich als Stieltjes-Integrale ausdrücken. Eines der besten Beispiele hierfür sind die Integrale zur Berechnung von Fourier-Koeffizienten, die auch in dieser Arbeit vorkommen und genau auf diese Weise bestimmt werden (vgl. Kapitel 3.8 »Harmonischer Analysator«).

3.7.2. Aufbau

Ausführungen über den Aufbau des Stieltjes-Integrals findet man bei Meyer zur Cappelen (1949), S. 208ff. und Willers (1951), S. 229ff. Außerdem kann man viel aus den entsprechenden Kapiteln zum Harmonischen Analysator ableiten (Meyer zur Cappelen (1949), S. 275ff. und Willers (1951), S. 203).
Ich habe mich vor allem an dem Text von Willers orientiert, von dem ich auch das Bild auf der nächsten Seite entnommen habe.

Zum Aufbau selbst:
Das Gerät besteht aus insgesamt drei Wagen, die übereinander liegen. Zuunterst liegt der Wagen W_1, der in der Leitschiene horizontal läuft. Ganz rechts auf diesem Wagen ist ein so genannter Winkelhebel angebracht. Das sind zwei Arme a und b, die sich um ihren Befestigungspunkt drehen können und dabei immer senkrecht zueinander stehen. Die Spitze des Armes a ist mit F_1 benannt. Mit ihm wird später der Graph der Funktion g abgefahren.

[21] Vgl. Meyer zur Cappelen (1949), S. 208.

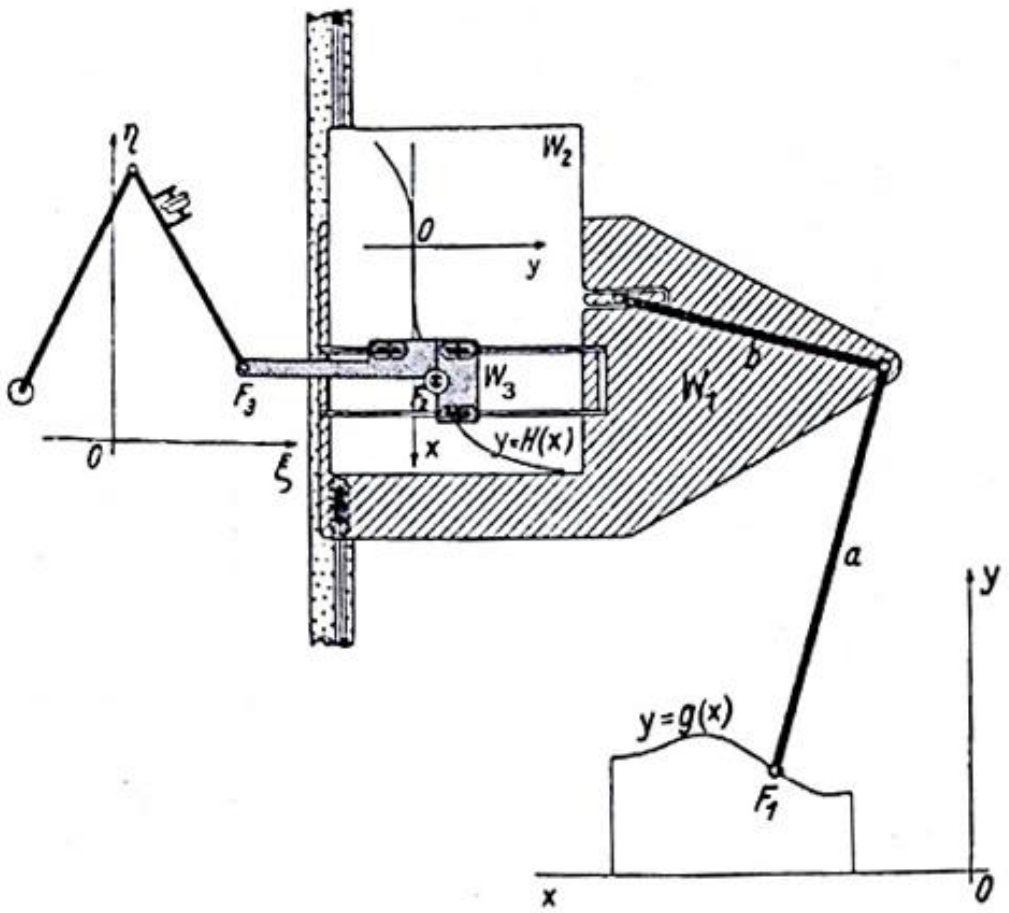

Bild 42: Schematische Zeichnung des Stieltjes-Planimeters Hinweis: ξ-η-Koordinatensystem nicht genau wie im Text beschrieben.

Auf dem Wagen W_1 ist der zweite Wagen W_2 angebracht. Auch er kann sich vertikal auf dem Wagen W_1 bewegen. An ihm ist der Arm b befestigt. Horizontal rollen kann der Wagen W_2 nicht.

Die Arme a und b wirken dabei als Verkleinerungs-Mechanismus. Wenn man die Spitze des Armes a um einige Zentimeter nach rechts verschiebt, bewegt sich die Spitze des Arms b wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke genau $\frac{b}{a}$-Mal so weit nach unten (vgl. Bild 43). Das hat zur Folge, dass sich der Wagen W_2, relativ zum Wagen W_1 immer genau $\frac{b}{a}$-Mal so weit nach unten bewegt, wie sich F_1 nach rechts bewegt.

Auf dem Wagen W_2 liegt außerdem die Zeichnung des Graphs der Funktion H. Die Zeichnung ist parallel zur Leitschiene ausgerichtet und damit senkrecht zur Zeichnung des Graphs der Funktion g.

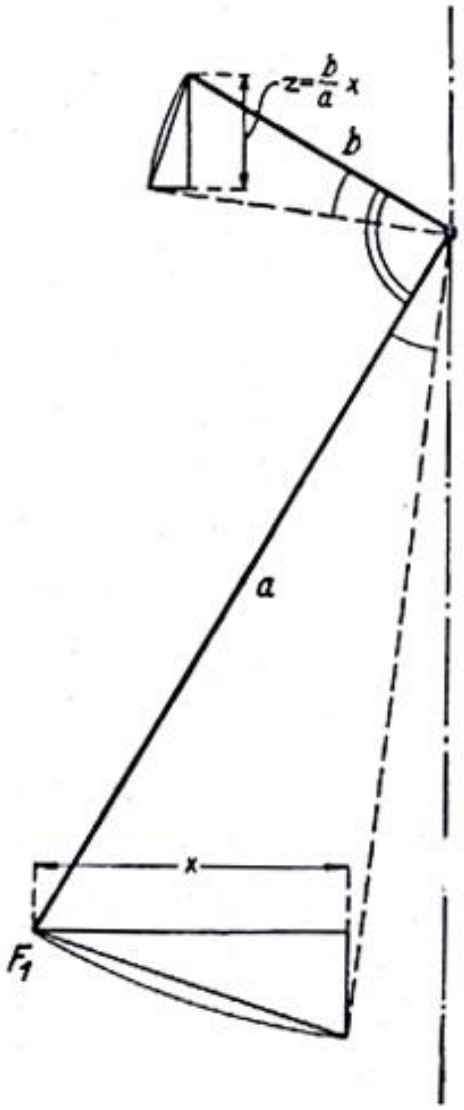

Bild 43: Die Funktionsweise eines Winkelhebels. Die beiden eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich. Die Strecke z hat daher die Länge $\frac{b}{a}x$.

Auf dem Arm b ist eine Skala von 2 bis 37 aufgebracht. Mit ihrer Hilfe kann die Länge des Fahrarms b angepasst werden. Dass Gerät ist so konstruiert, dass sich der Fahrarm bei einer Länge von $b = 20$ von ganz links nach ganz rechts genau 20 cm weit bewegt. Das bedeutet, dass sich, bei einer Bewegung des Fahrstiftes von ganz links um 20 cm nach ganz rechts, der Wagen W_2 auf dem Wagen W_1 von ganz oben nach ganz unten bewegt. Auch an der Leitschiene befindet sich eine Skala von 1 bis 36. Mithilfe der beiden Skalen und dem beiliegenden Einstellwinkel (vgl. Bild 41 rechts) kann das Gerät eingestellt werden (vgl. Kapitel 3.7.3 »Anwendung«).

In wenigen Zentimetern über der Zeichnung des Graphs der Funktion H und befestigt an dem untersten Wagen W_1, erstrecken sich horizontal zwei weitere Schienen, auf denen der dritte Wagen W_3 eingesetzt wird. Er läuft horizontal und ist in der Mitte mit einer Lupe mit einem Fadenkreuz F_2 versehen, mit dem man den Graph der Funktion H abfährt. Das linke Ende des Wagens ist verlängert und mit einer Vertiefung F_3 versehen, in der ein beliebiges Grundplanimeter (in der Regel ein Polarplanimeter) eingehängt werden kann, das schlussendlich den Wert des Integrals bestimmt. Damit das Grundplanimeter die Höhendifferenz von dem Tisch auf die Maschine nicht überbrücken muss, liegt dem Gerät ein Holzpodium bei, welches das Grundplanimeter auf dieselbe Höhe hebt, auf der sich die Vertiefung F_3 befindet (welches bei dem Gerät in der Sammlung der AG Numerik leider fehlt).

Zusammengefasst führt das Gerät folgende Bewegungen aus, wenn man den Fahrstift bewegt:

Bewegt man den Fahrstift F_1 nach oben oder unten, bewegt man die ganze Apparatur inklusive den Wagen W_1, W_2, W_3 und den Schienen, auf denen W_3 fährt und die an W_1 befestigt sind, nach oben oder unten. Gegeneinander verschieben sich die Wagen dabei nicht. Nur die Leitschiene und das Holzpodium stehen still. Das Polarplanimeter auf dem Holzpodium bewegt sich und folgt mit seinem Fahrstift der vertikalen Bewegung nach oben oder unten.

Bewegt man den Fahrstift F_1 nach rechts bzw. links, dann bewegt sich zunächst einmal vor allem der Wagen W_2, auf dem die Zeichnung von H befestigt ist. Die Zeichnung bewegt sich auf dem Wagen W_1 und unter dem Wagen W_3 nach unten bzw. nach oben. Gleichzeitig bewegt sich aber auch der Wagen W_1, denn der Fahrarm b kann sich nicht horizontal von links nach rechts oder umgekehrt bewegen, er kann sich nur um seine Befestigung auf dem Wagen W_1 drehen. Um den Fahrstift trotzdem horizontal bewegen zu können, übt man neben der Drehbewegung, die man auf den Fahrarm ausübt, auch noch eine vertikale Kraft aus, um die Höhe anzupassen und den Stift auf einer horizontalen Linie zu halten. Durch diese Kraft verschiebt sich der Wagen W_1 zusammen mit den Wagen W_2 und W_3. Insgesamt verschieben sich bei einer horizontalen Bewegung des Fahrstiftes also alle drei Wagen. Der Wagen W_2 erfährt aber darüber hinaus noch eine horizontale Bewegung relativ zu den beiden anderen. Das Holzpodium und das Polarplanimeter stehen still, wie bei der vertikalen Bewegung. Horizontale Bewegungen führt der Wagen W_3 nur dann aus, wenn man ihn gezielt horizontal bewegt. Dann bewegt er sich unabhängig von allen anderen Bewegungen der Maschine.

3.7.3. Anwendung

Folgende Anleitung habe ich selbst zusammengestellt, da ich keine Anleitung finden konnte, wie das Gerät Schritt für Schritt zu benutzen ist.

Um das Stieltjes-Planimeter anwenden zu können, müssen zunächst einmal die Zeichnungen der Funktionsgraphen im richtigen Maßstab vorliegen.

Der Wagen, auf dem die Zeichnung des Graphs der Funktion H liegt, ist auf A4-Blätter ausgelegt. Der Graph von H muss also auf einem A4-Blatt gezeichnet sein. Die Zeichnung muss in der Blatt-Mitte liegen. Der größte und der kleinste Abszissen-Wert müssen einen Abstand von 237 mm haben. Auf diese Weise sind rechts und links von der Zeichnung genau drei Zentimeter Platz. Was die Ordinate angeht, kann das A4-Blatt voll ausgenutzt werden. Diese Werte sind vorgeschrieben. Weicht man von ihnen ab, funktioniert das Gerät nicht korrekt. Wie verhält man sich also, wenn man das Stieltjes-Integral über einen Bereich bestimmen will, der größer oder kleiner als 237 mm ist? Oder wenn man sehr große Ordinatenwerte hat? In diesem Fall bleiben einem nur zwei Möglichkeiten: Einerseits kann man die Zeichnung mithilfe eines Pantographen maßstabsgetreu vergrößern oder verkleinern, um sie in die richtige Größe zu bringen, andererseits kann man die Achsen anders skalieren (heute könnte man die Zeichnung auch kleiner kopieren). Dabei ist jedoch zu beachten, dass man die Größenveränderung und die Skalierung später ggf. heraus rechnen muss. Außerdem muss man darauf achten, dass das Koordinatensystem, in dem der Graph der Funktion g gezeichnet ist, maßstabsgetreu zu dem Koordinatensystem sein muss, in dem der Graph der Funktion H gezeichnet ist. Eine unterschiedliche Achsenskalierung scheidet also aus.

Nun zu dem Graphen von g. Er muss nicht auf einem A4-Blatt gezeichnet sein. Hier hat man freie Wahl. Auch der Abstand des größten und kleinsten Abszissenwertes ist nicht fest vorgeschrieben. Der Abstand muss nur mindestens zwei Zentimeter und maximal 37 cm betragen. Die Ordinaten-Werte dürfen nach oben bzw. unten jeweils um bis zu 20 cm von der Abszisse abweichen.

Sind die Graphen in der richtigen Form vorhanden, nimmt man den Einstellwinkel zur Hand (vgl. Bild 41 rechts). Er hat zwei Skalen. Die untere ist metrisch und geht von 1 bis 37 cm. Man kann sie als Lineal benutzen, um den Abstand des kleinsten und des größten Abszissenwertes in dem Graphen der Funktion g zu bestimmen. Hat man diesen Wert, legt man die Leitschiene an die Zeichnung von g an. Auf der Leitschiene befindet sich eine Skala von 1 bis 36. An dieser Skala legt man den Einstellwinkel an, so dass die Markierung auf dem Einstellwinkel auf der Skala möglichst genau dem Wert entspricht, den man eben ausgemessen hat. Nun betrachtet man die obere Skala auf dem Einstellwinkel. Sie geht von 37 bis 0 und wieder von 0 bis 37. Bei ihr entspricht

eine Skalenwert einem halben Zentimeter. Man nimmt nun die Zeichnung von g und richtet sie so an dem Einstellwinkel aus, dass die Abszisse genau an der Kante des Winkels liegt, die Mitte der Abszisse genau bei 0, der kleinste und der größte Abszissen-Wert genau bei der Zahl, die man zuletzt ausgemessen hat. Dann entfernt man den Einstellwinkel und fixiert die Zeichnung mit zwei Reißzwecken. Warum das alles getan wird, erkläre ich gleich.

Daraufhin setzt man den Wagen W_1 in die Leitschiene ein und setzt auf dem Wagen W_1 den Winkelhebel ein. Man stellt den Fahrstift anhand der Skala, die auf dem Hebel aufgebracht ist, auf den Wert ein, den man vorhin mit dem Einstellwinkel ausgemessen hat. Auf W_1 ist der Wagen W_2 schon fest montiert.

Das Klemmbrett, auf dem die Zeichnung von H eingesetzt wird, muss nun noch auf den Wagen aufgesetzt werden. Zu diesem Zweck befinden sich auf dem Wagen drei Zapfen und auf der Unterseite des Klemmbretts drei Vertiefungen. Die Zeichnung von H sollte aber vor dem Aufsetzen des Klemmbretts in dieses eingespannt werden.

Das Gerät ist nun richtig konfiguriert, wenn man allen Anweisungen gefolgt ist, den Winkelhebel richtig eingestellt und die Zeichnung von g wie oben beschrieben relativ zum Gerät richtig positioniert hat. Wenn man nun mit dem Fahrstift F_1 den Graphen von g abfährt, bewegen sich die Wagen so, dass sich das Fadenkreuz von W_3 (der im Moment noch nicht aufgebaut ist) immer an der entsprechenden Abszissen-Stelle auf dem Graphen von H befindet. Stellen wir aber zunächst den Aufbau fertig.

Auf der linken Seite des Wagens W_1 (inzwischen unter dem Klemmbrett) befinden sich zwei Vertiefungen. Hier werden die Schienen eingesetzt, die über das Klemmbrett führen und auf denen der Wagen W_3 läuft. Der Wagen wird darauf gesetzt, die Lupe mit dem Fadenkreuz installiert und der Griff montiert. Nun kann man den Wagen W_3 so verschieben, dass er sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet, in das die Zeichnung von H gezeichnet wurde, wenn sich der Fahrstift F_1 in dem Ursprung des Koordinatensystems befindet, in das g gezeichnet ist.

Zum Schluss wird links von dem Gerät noch das Holzpodium aufgebaut, das Polarplanimeter aufgesetzt und in den Wagen W_3 eingesetzt. Nun ist das Gerät funktionsbereit.

Will man nun beginnen, das Integral $\int_{x_0}^{x_1} g(x) \cdot H'(x)\, dx$ zu bestimmen, positioniert man F_1 an dem Punkt $(x_0, 0)$ und F_2 an dem Punkt $(x_0, H(x_0))$, ,jeweils in ihrem eigenen Koordinatensystem, und notiert den aktuellen Wert auf dem Polarplanimeter. Dann bewegt man F_1 senkrecht nach oben oder unten, bis zu dem Punkt $\big(x_0, g(x_0)\big)$, an dem der Graph von g beginnt. Dabei sollte sich das Klemmbrett mit der Zeichnung von H nicht relativ zu F_2 verschieben. Wenn man nun mit F_1 den Graph von g in x-Richtung abfährt, setzt sich auch F_2 in x-Richtung in Bewegung. Nur die y-Koordinate von F_2 muss durch horizontales Verschieben des Wagens W_3 angepasst werden, so dass sich F_2 immer auf dem Graph von H bewegt.

Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder man bedient das Gerät zu zweit, einer fährt mit F_1 den Graphen von g ab und der Andere passt die y-Koordinate von F_2 an. Oder man automatisiert die Anpassung der y-Koordinate. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass man den Graphen von H als Leitkurve aus Eisen anfertigt und das Fadenkreuz F_2 durch einen Zapfen ersetzt, der in der Leitkurve läuft. Auf diese Weise wird die y-Koordinate von F_2 beim Abfahren des Graphs von g mit F_1 automatisch angepasst.

Hat man den Graphen von g befahren und befindet sich an dem Punkt $\big(x_1, g(x_1)\big)$, an der Abszissen-Stelle x_1, dann bewegt man F_1 wieder senkrecht auf die x-Achse. F_2 bewegt man nicht. Erst jetzt, wenn man F_1 auf der x-Achse zu dem Punkt zurück führt, an dem man begonnen hat, führt man F_2 wieder auf dem Graphen von H entlang. Ist man wieder am Ursprungspunkt angekommen, notiert man sich erneut den Wert auf dem Polarplanimeter, berechnet die Differenz und multipliziert die erhaltene Zahl mit einer Konstanten, die man der Geräteanleitung entnehmen kann (der so genannten *Gerätekonstanten*). Das Ergebnis dieser Rechnung ist das Integral

$\int_{x_0}^{x_1} g(x) \cdot H'(x)\, dx.$

3.7.4. Wirkweise

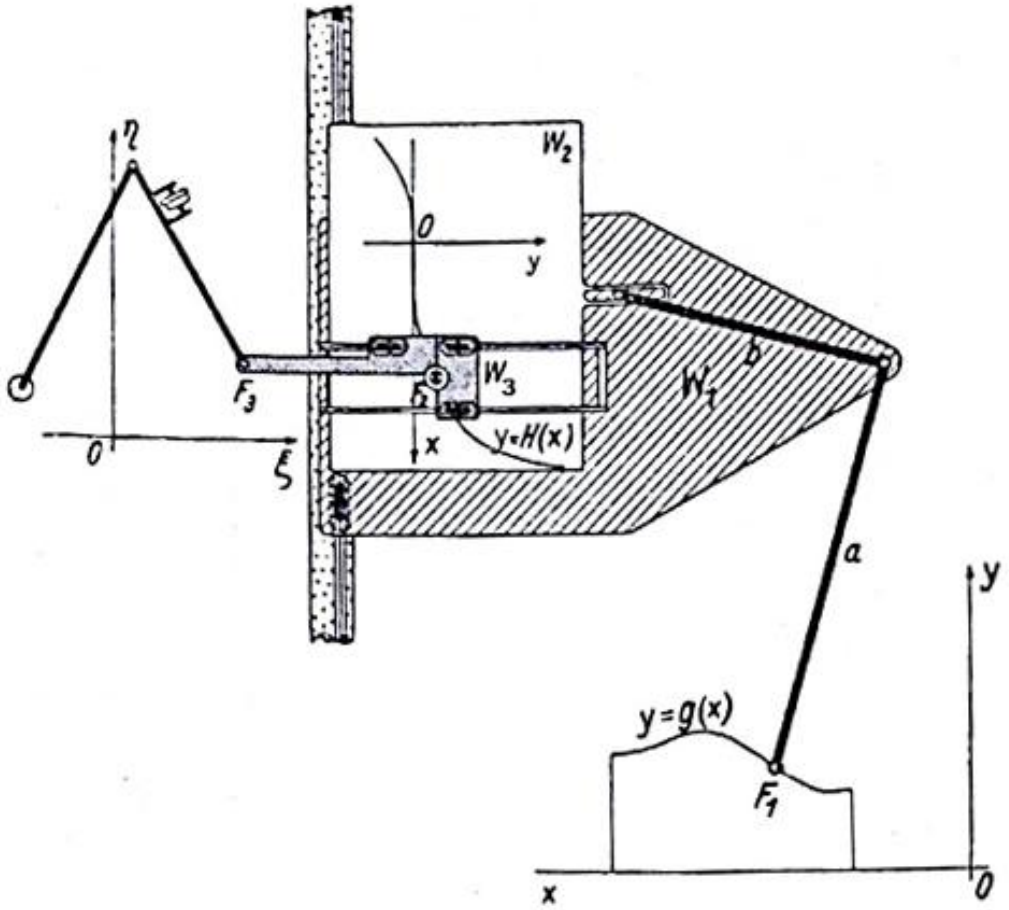

Bild 44: Schematische Zeichnung des Stieltjes-Planimeters Hinweis: ξ-η-Koordinatensystem nicht genau wie im Text beschrieben.

Im Folgenden nutzen wir die Notation, die wir unter »Aufbau« verwendet haben. Inhaltlich basieren die Ausführungen auf Willers (1951), S. 229ff.

Da in die Vertiefung F_3 ein Polarplanimeter eingehängt wird, an dessen Messrolle schlussendlich der Wert des Stieltjes-Integrals abgelesen wird, verdient die Kurve, welche man mit F_3 umfährt, besonderer Beachtung. Wie in Kapitel 3.5 »Polarplanimeter« angegeben, bestimmt ein solches Planimeter nämlich gerade das Integral dieser Kurve.

Betrachten wir die Kurve von F_3 in einem ξ-η-Koordinatensystem, wobei die ξ-Achse die Horizontale bezeichne und die η-Achse die Vertikale. Der Koordinatenursprung soll an dem Punkt liegen, an dem sich F_3 befindet, wenn F_1 und F_2 jeweils im Koordinatenursprung ihrer Graphen liegen.

Betrachten wir nun, wie sich

$$F_3 = (\xi, \eta)$$

in diesem Koordinatensystem bewegt.

Horizontale Bewegungen, also Bewegungen in ξ-Richtung macht der Punkt F_3 nur, wenn der Wagen W_3 bewegt wird. Die anderen Wagen W_1 und W_2 können gar keine horizontalen Bewegungen durchführen. Da mit F_2 immer der Graph von H abgefahren wird, gilt immer $\xi = H(x)$.

In vertikale Richtung, also in η-Richtung, wird die Vertiefung F_3 nur geführt, wenn die ganze Apparatur nach oben oder unten verschoben wird. Gemäß dem Kapitel »Aufbau« geschieht das in zwei Fällen: 1. wenn der Fahrstift F_1 nach oben oder unten verschoben wird; 2. Wenn der Fahrstift F_1 nach rechts oder links verschoben wird. Im ersten Fall kann die Höhendifferenz von F_1 zur Abszisse leicht angegeben werden:

Sie steigt zunächst von 0 bis $g(x_0)$ an, dann beträgt sie $g(x)$, fällt wieder von $g(x_1)$ auf 0 ab und bleibt bis zum Schluss 0, bis sich F_1 wieder in der Ursprungsposition befindet. Es handelt sich um insgesamt vier Bewegungen. Diese vier Bewegungen werden nun B_1, B_2, B_3 und B_4 genannt.

Im zweiten Fall, bei Bewegungen des Fahrstiftes F_1 nach rechts oder links, kann die Distanz, um die F_3 nach oben verschoben wird, bereits nicht mehr so einfach angegeben werden. Klar ist aber, dass jeder Stelle x der Abszisse eindeutig eine Distanz zugeordnet werden kann, um die F_3 nach oben verschoben wird. Nennen wir diese Distanz $v(x)$.

Insgesamt erhalten wir also,…

- für die Bewegung B_1:

  η steigt von 0 bis $g(x_0)$ an. $\xi = H(x_0)$.
- für die Bewegung B_2:

  $\eta = g(x) + v(x)$. $\xi = H(x)$, mit $x_0 \leq x \leq x_1$.
- für die Bewegung B_3:

  η fällt von $g(x_1)$ auf 0 herab. $\xi = H(x_1)$.
- für die Bewegung B_4:

  $\eta = v(x)$. $\xi = H(x)$, mit $x_1 \geq x \geq x_0$.

Welches Integral bestimmt also das Polarplanimeter? Da gemäß Kapitel 3.3.4.1 und 3.5 ein Polarplanimeter und ein Linearplanimeter dasselbe Integral bestimmen, wird die Hilfsvorstellung eingeführt, dass der Punkt F_3 kein Polarplanimeter, sondern ein Linearplanimeter führt. Außerdem soll das Linearplanimeter so ausgerichtet sein, dass seine Leitschiene parallel zur ξ-Achse liegen würde. Dann kann man das Integral, welches durch das Linearplanimeter bestimmt wird, folgendermaßen angeben:

Die Bewegungen B_1 und B_3 sind nichts anderes als vertikale Bewegungen nach oben bzw. unten. Da F_3 eine geschlossene Kurve umfährt, haben vertikale Bewegungen keinen Einfluss auf das Integral, das bestimmt wird (vgl. Kapitel 3.3.4.1 »Grund-Linearplanimeter«).

Wie weiter aus dem Kapitel »Grund-Linearplanimeter« hervor geht, wird bei einer Bewegung nach rechts der Flächeninhalt zwischen der Bewegung und der ξ-Achse mit positivem Vorzeichen bestimmt und bei einer Bewegung nach links der Flächeninhalt zwischen der Bewegung und der ξ-Achse mit einem negativen Vorzeichen. Da $\xi = H(x)$ jedoch steigt und fällt, bewegt sich F_3 abwechselnd nach rechts und nach links. Sowohl bei der Bewegung B_2, als auch bei der Bewegung B_4 wechseln sich die Bewegungen nach rechts und links ständig ab, je nachdem, ob $\xi = H(x)$ steigt oder fällt, d.h. je nachdem ob $\xi' = H'(x) > 0$ oder < 0 ist.

Trotzdem gibt es mit der Methode des Riemann-Integrals durch die Approximation mit Rechtecken einen einfachen Weg, den Flächeninhalt unter diesen Bewegungen zu berechnen.

Wir unterteilen die x-Achse in dem Koordinatensystem, in das die Funktion g gezeichnet ist, in n Teile

$$x_0 = x_{0,0} \leq x_{0,1} \leq x_{0,2} \dots \leq x_{0,n-1} \leq x_{0,n} = x_1.$$

Dem entsprechen wegen $\xi = H(x)$

$$\xi_0 = H(x_{0,0}), \xi_1 = H(x_{0,1}), \dots, \xi_{n-1} = H(x_{0,n-1}), \xi_n = H(x_{0,n}).$$

Dann erhält man mit

$$\sum_{i=0}^{n} \eta(\xi_i) \cdot (\xi_{i+1} - \xi_i) = \sum_{i=0}^{n} \eta(\xi_i) \cdot \left(H(x_{0,i+1}) - H(x_{0,i})\right)$$

eine Näherung für den Flächeninhalt zwischen der Bewegung und der ξ-Achse. Dabei werden bei Bewegungen nach links die Flächeninhalte unter diesen Bewegungen bereits negativ gezählt. Denn in diesem Fall ist

$$H(x_{0,i+1}) < H(x_{0,i}) \Longrightarrow H(x_{0,i+1}) - H(x_{0,i}) < 0.$$

Bewegungen nach rechts werden nach wie vor positiv gerechnet.

In je mehr Teile n man die x-Achse einteilt, desto genauer wird die Approximation des Flächeninhaltes. Auf diese Weise lässt sich der Flächeninhalt beliebig genau annähern. Wir können diese Formel aber noch weiter umformen:

Weil nämlich

$$\frac{H(x_{0,i+1}) - H(x_{0,i})}{x_{0,i+1} - x_{0,i}} \xrightarrow{n\to\infty} H'(x_{0,i})$$

$$\Leftrightarrow H(x_{0,i+1}) - H(x_{0,i}) \xrightarrow{n\to\infty} H'(x_{0,i}) \cdot (x_{0,i+1} - x_{0,i})$$

gilt, kann man obige Formel umformulieren zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty} \eta(\xi_i) \cdot (\xi_{i+1} - \xi_i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \eta(\xi) \cdot \Big(H(x_{0,i+1}) - H(x_{0,i})\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \eta(\xi) \cdot \Big(H'(x_{0,i}) \cdot (x_{0,i+1} - x_{0,i})\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\eta(\xi) \cdot H'(x_{0,i})\Big) \cdot (x_{0,i+1} - x_{0,i}) \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \eta(\xi) \cdot H'(x)\, dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \eta(\xi)\, dH(x).
\end{aligned}$$

Hier sehen wir also das Stieltjes-Integral. Für die Bewegung B_2 erhalten wir

$$\int_{x_0}^{x_1} \big(g(x) + v(x)\big) \cdot H'(x)\, dx.$$

Für die Bewegung B_4:

$$\int_{x_1}^{x_0} v(x) \cdot H'(x)\, dx.$$

Insgesamt ergibt sich also als Flächeninhalt an der Messrolle des Polarplanimeters:

$$\int_{x_0}^{x_1} \big(g(x) + v(x)\big) \cdot H'(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_0} v(x) \cdot H'(x)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \big(g(x) + v(x)\big) \cdot H'(x)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} v(x) \cdot H'(x)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (g(x) + v(x) - v(x)) \cdot H'(x)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} g(x) \cdot H'(x)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dH(x).$$

q.e.d.

3.8. Harmonischer Analysator

3.8.1. Zweck

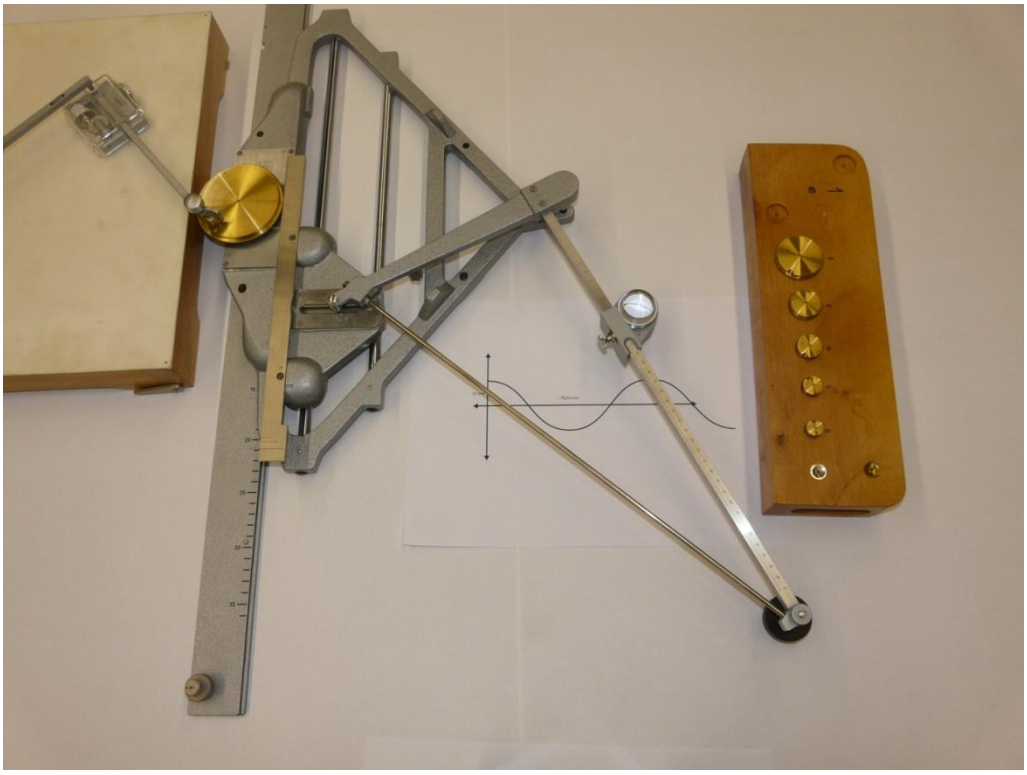

Bild 45: Harmonischer Analysator. Der Fahrstift ist durch eine Lupe ersetzt.

Der Harmonische Analysator dient der Bestimmung von Fourier-Koeffizienten. Die Koeffizienten werden bestimmt, indem der Graph der Funktion abgefahren wird, die in eine Fourier-Reihe entwickelt werden soll.

Im Anhang befindet sich ein von mir erstelltes Video, welches dieses Kapitel veranschaulicht.

Das Gerät kann Zeichnungen von Graphen mit einer Periodenlänge von 4 bis 36 cm verarbeiten. Die größte zulässige Ordinate auf jeder Seite der x-Achse ist 16 cm.

Fourier-Reihen haben ein breites Anwendungsspektrum:

Klänge sind Schwankungen im Luftdruck. Sie lassen sich als periodische Funktionen darstellen, welche sich wiederum in Fourier-Reihen entwickeln lassen. Auf diese Weise kann man auch komplexe Klänge analysieren und sie auf Grundtöne und Obertöne zurück führen.

Auf dieselbe Weise kann Elektrizität auf Oberwellen oder Licht analysiert werden.
Ganz allgemein lässt sich nach dem Satz von Dirichlet jede beschränkte, stückweise differenzierbare und periodische Funktion in eine Fourier-Reihe entwickeln.

Hinweis auf Parallelen zum Stieltjes-Plaimeter

Das Gerät ist eine Abwandlung des Stieltjes-Planimeters und ist deshalb von Aufbau und Anwendung her fast identisch.

Die gesuchten Fourier-Koeffizienten haben bekanntlich die Form

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cdot\cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cdot\sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)\,dx,$$

wobei p die Periodenlänge ist.
a_0 kann durch einfaches Abfahren des Graphen von f mit einem Grundplanimeter und Multiplikation mit Konstanten bestimmt werden. Die Koeffizienten a_n und b_n können als Stieltjes-Integrale verstanden werden, wenn man die Cosinus- bzw. die Sinus-Funktion als Ableitung interpretiert. Man könnte also auch das Stieltjes-Planimeter zur Bestimmung der Koeffizienten verwenden, indem man $g = f$ und $H' = \cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)$ bzw. $H' = \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)$ setzt. Genau auf diese Weise arbeitet auch der Harmonische Analysator. Es handelt sich nur um eine leicht angepasste Version des Stieltjes-Planimeters, das es erlaubt schnell hintereinander Koeffizienten verschiedener Ordnung zu berechnen. Außerdem ist der Harmonischen Analysator so konstruiert, dass man ihn alleine bedienen kann.
Die Ausführungen in diesem Kapitel 3.8 basieren vor allem auf der Geräteanleitung OTT Messtechnik (1931), die dem Gerät beilag. Vgl. aber auch Meyer zur Cappelen (1949), S. 275ff. und Willers (1951), S. 203.

3.8.2. Aufbau

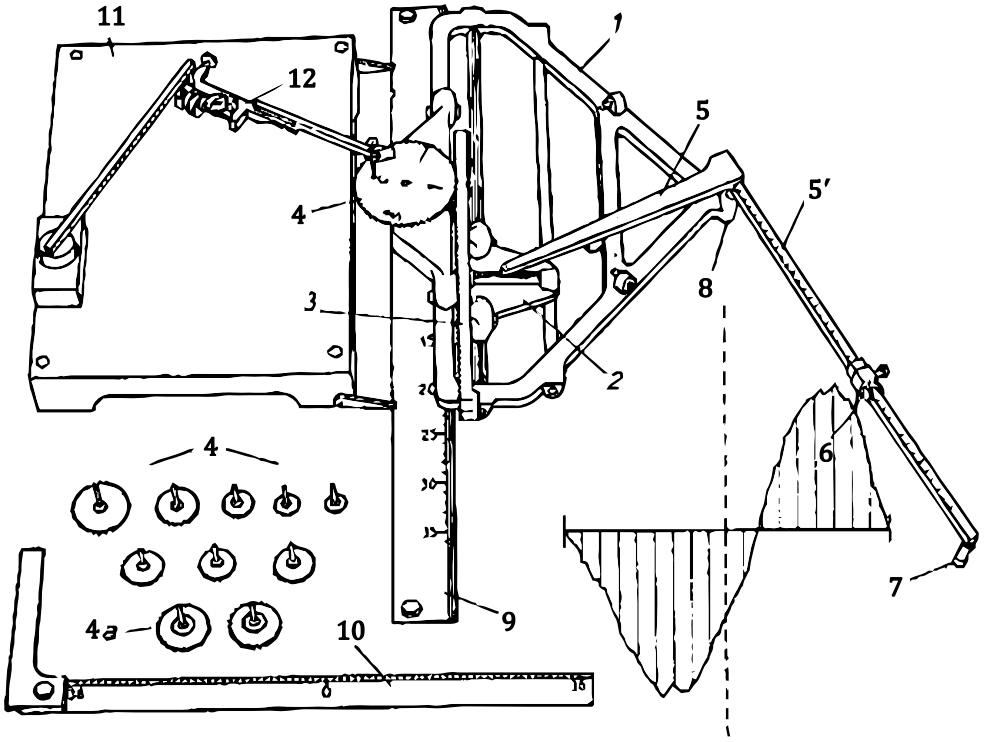

Bild 46: Harmonischer Analysator. (1) Großer Wagen, der sich vertikal auf der Leitschiene bewegt. (2) Kleiner Wagen, an dem sich die Zahnradstange befindet und der sich durch den Winkelhebel vertikal auf dem Großen Wagen bewegt. (3) Zahnradstange. (4) und (4a) Zahnräder. (5) und (5‘) sind zusammen der Winkelhebel. (5‘) ist der Fahrarm mit Markierung zum Einstellen der Höhe des Fahrstiftes, bzw. der Periodenlänge der zu analysierenden Funktion. (6) Fahrstift, in seiner Position auf dem Fahrarm verstellbar. (7) Bewegungshilfe für den Fahrarm (Hier wird der Fahrarm geführt). (8) Drehpunkt des Winkelhebels auf dem großen Wagen. (9) Leitschiene. (10) Einstellwinkel zum Anbringen an der Leitschiene und leichteren Orientierung des Geräts gegenüber der Kurve. (11) Holzpodium. (12) Polarplanimeter.

Die Wagen W_2 und W_3 des Stieltjes-Planimeters sind bei dem Harmonischen Analysator durch eine Zahnradstange mit der Länge p und einem Zahnrad ersetzt, wobei Zahnradstange und Zahnrad miteinander verzahnt sind. Während das Zahnrad fest montiert ist, ist die Zahnradstange wie bei dem Stieltjes-Planimeter der Wagen W_2 mit dem Winkelhebel verbunden und bewegt sich vertikal, wenn sich der Winkelhebel bewegt.

Auf dem Zahnrad befinden zwei je um 90° versetzte Vertiefungen S und C. Sie stehen für Sinus und Cosinus und dienen als Einhängepunkt für ein Grundplanimeter (in der Regel ein Polarplanimeter). Damit das Grundplanimeter die Höhendifferenz von dem Tisch auf die Maschine nicht überbrücken muss, liegt

diesem Gerät ein Holzpodium bei, welches das Grundplanimeter auf dieselbe Höhe hebt wie das Zahnrad. Weiterhin liegen dem Gerät viele verschiedene Zahnräder mit unterschiedlichen Größen bei, die jeweils so konstruiert sind, dass sie sich genau n-Mal auf der Zahnradstange abrollen können. Die Zahl n ist dabei auf dem Zahnrad eingraviert. Diese Zahnräder können in die Steckplätze an der Zahnradstange eingesetzt und ausgetauscht werden und ermöglichen es so, Fourier-Koeffizienten unterschiedlicher Ordnung zu berechnen.
Auf dem Fahrarm des Winkelhebels sind die verschiedenen Periodenlängen eingraviert, die das Gerät verarbeiten kann. An dieser Skala lässt sich einstellen, in welcher Höhe sich der Fahrstift auf dem Fahrarm befindet.

3.8.3. Anwendung[22]

Um das Gerät benutzen zu können, muss eine Zeichnung des Graphs der zu analysierenden Funktion in passenden Maßen vorliegen (Periodenlänge zwischen 4 und 36 cm; Ordinate auf jeder Seite der x-Achse höchstens 16 cm).
Die Nummerierung der im Folgenden erklärten Bauteile bezieht sich auf Bild 46. Man misst mithilfe des Einstellwinkels (10) die Periodenlänge der Funktion, legt den Einstellwinkel an die der Periodenlänge entsprechenden Stelle der Skala auf der Leitschiene (9) und platziert den Graph mithilfe des Einstellwinkels so, dass die Periodenmitte auf der Skala des Einstellwinkels bei null liegt. Dann entfernt man den Einstellwinkel. Man fixiert das Blatt mit zwei Reißzwecken, baut den großem Wagen (1) und den Einstellwinkel (5 und 5‘) auf und stellt den Fahrstift auf die der Periodenlänge entsprechende Position auf dem Fahrarm ein. Links von der Leitschiene positioniert man das Holzpodium. Um das Podium richtig zu positionieren, befindet sich eine Vertiefung in der Leitschiene. Das Holzpodium hat zwei kleine Distanz-Halter die helfen, das Podium in der richtigen Distanz aufzustellen. Auf das Holzpodium wird das Polarplanimeter gesetzt und nach oben-rechts ausgerichtet. Nun positioniert man den Fahrstift auf der x-Achse unter dem Beginn der Periode.
Der Harmonische Analysator kann Fourier-Koeffizienten bis zur Ordnung $n = 25$ bestimmen. Ist der zu bestimmende Koeffizient von der Ordnung

[22] Wem diese kurze Anleitung nicht ausreicht, dem sei angeraten das Kapitel »Anwendung« zu dem Stieltjes-Planimeter und das Video im Anhang hinzu zu ziehen.

$n \leq 6$, so wählt man das Zahnrad mit der eingravierten Zahl n aus und setzt es in den Steckplatz mit der Zahl n ein, so, dass es mit der Zahnstange verzahnt ist und die Markierungen auf Zahnrad und Zahnradstange übereinstimmen. Ist $n > 6$, muss man zwei Zahnräder kombinieren. Zunächst wählt man wieder das Zahnrad mit der eingravierten Zahl n aus und setzt es in den entsprechenden Steckplatz. Anschließend sucht man unter den Zahnrädern, auf denen ein Bruch der Form $\frac{6}{11 \quad 17}$ eingraviert ist, dasjenige (Zwischenrad), bei dem eine der beiden Zahlen unter dem Bruchstrich die Zahl n ist. Die Zahl über dem Bruchstrich gibt an, in welchen Steckplatz das Zahnrad gesteckt werden muss; die Zahlen unterhalb des Bruchstrichs geben an, für welche n das Zahnrad zu verwenden ist. Die Zahnräder sind so einzusetzen, dass sie miteinander und mit der Zahnstange verzahnt sind. Außerdem sind auf den Zahnrädern und der Zahnstange Markierungen, die durch Drehen der Zahnräder in der Ausgangsposition jeweils aneinander liegen müssen. Auf manchen Zahnrädern ist die Zeichenfolge »: 2« eingraviert. Diese Gravierung bedeutet, dass das Ergebnis, das später an der Messrolle abgelesen wird, durch zwei dividiert werden muss.

Weiterhin sind, wie unter Aufbau beschrieben, auf dem Zahnrad mit der Zahl n (nicht dem Zwischenrad) zwei Vertiefungen S und C eingraviert. In eine dieser Vertiefungen wird der Fahrstift des Polarplanimeters eingesetzt. S für die Berechnung von b_n und C für a_n.

Bevor man nun mit dem Abfahren des Graphs beginnt, notiert man sich die Zahl, die auf der Messrolle angezeigt wird. Anschließen fährt man mit dem Fahrstift senkrecht nach oben, bis man auf dem Graphen ist. Man fährt den Graph im Uhrzeigersinn ab. Ist man am Periodenende angelangt, bewegt man den Fahrstift senkrecht auf die x-Achse und auf dieser wieder zurück, bis man beim Periodenanfang angekommen ist. An dieser Stelle notiert man sich erneut die Zahl, welche die Messrolle anzeigt, und berechnet die Differenz der beiden Messrollen-Werte. Wenn man zuvor ein Zahnrad mit der Gravur »: 2« eingesetzt hat, muss man diese Zahl durch zwei teilen. Je nachdem, welches Polarplanimeter man verwendet, muss man diese Zahl ggf. noch mit der entsprechenden Gerätekonstante des Polarplanimeters multiplizieren. Das Ergebnis dieser Rechnung ist der gesuchte Wert a_n bzw b_n.

Bei dem Gerät in der Sammlung der AG Numerik entspricht einem Noniusteil auf der Messrolle ein b_n von 0,01 cm (vgl. »Wirkweise«).

3.8.4. Wirkweise

Wir betrachten die Vertiefung, in der das Planimeter eingehängt ist, wieder in einem ξ-η-Koordinatensystem, wie bei dem Stieltjes-Planimeter. Dieses Mal soll der Ursprung des Koordinatensystems jedoch an der Stelle liegen, an der die Zahnrad-Mitte liegt, wenn sich das Gerät in der Anfangsposition befindet (unmittelbar bevor mit dem Abfahren begonnen werden kann). Im Folgenden wird o.B.d.A. nur die Vertiefung S betrachtet.

Zunächst wird eine neue Notation eingefügt:

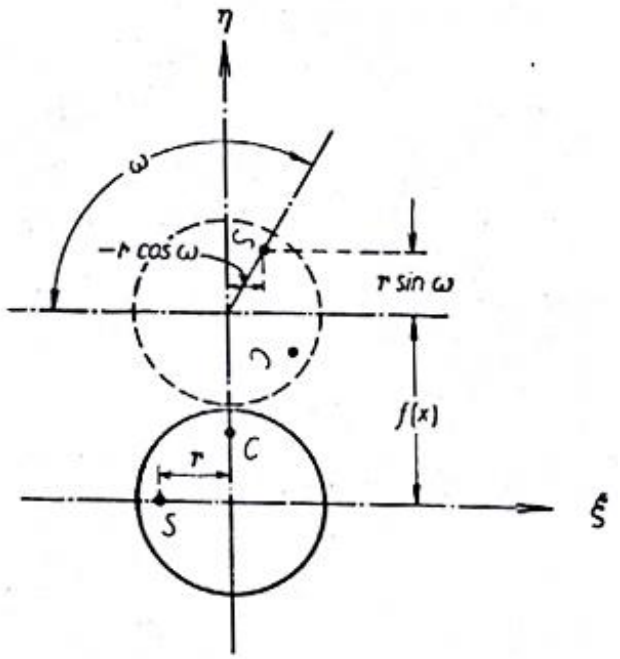

Bild 47: Das Zahnrad. Das untere Rad stellt das Zahnrad in seiner Ausgangsposition dar. Das obere, gestrichelt-gezeichnete Rad, stellt das Zahnrad dar, nachdem der Fahrstift der Maschine verschoben worden ist. Es ist um den Winkel ω gedreht und vertikal verschoben.

Der Abstand, den die Vertiefungen S und C zur Zahnradmitte haben, wird r genannt. Außerdem wird der in Bild 46 eingezeichnete Winkel ω eingeführt. Mithilfe dieser Variablen lässt sich nun die Position der Vertiefung S relativ zum Zahnradursprung leichter angeben: Der vertikale Abstand beträgt $r\sin(\omega)$, der horizontale Abstand $-r\cos(\omega)$.

In wie weit ist das hilfreich für die Bestimmung der ξ- und der η-Koordinaten? Nun, es liefert die ξ-Koordinate der Vertiefung S:

$$\xi = -r\cos(\omega).$$

Auch die η-Koordinate, d.h. der vertikale Abstand der Vertiefung S zu der Stelle, an der sich die Zahnradmitte in der Ursprungsposition befunden hat, lässt sich leicht bestimmen:

Die einzige vertikale Verschiebung des Zahnrads erfolgt, wenn der große Wagen des Geräts verschoben wird, d.h. wenn der Fahrstift vertikal oder horizotal verschoben wird. Die Situation ist schon aus dem Kapitel 3.7.4 »Wirkweise« des Stieltjes-Planimeters bekannt. Die Bewegungen B_1 und B_3 werden wieder ignorieren. Bei der Bewegung B_2 ergibt sich bei dem Harmonischen Analysator

$$\eta = f(x) + v(x) + r\sin(\omega)$$

und damit das Integral

$$\int_0^p (f(x) + v(x) + r\sin(\omega)) \cdot (-r\cos(\omega))'\, dx,$$

wobei p wieder die Periodenlänge der zu analysierenden Funktion ist.

Bei der Bewegung B_4 ergibt sich

$$\eta = v(x) + r\sin(\omega)$$

und damit das Integral

$$\int_p^0 (v(x) + r\sin(\omega)) \cdot (-r\cos(\omega))'\, dx.$$

Insgesamt misst das Polarplanimeter also das Integral

$$\begin{aligned}
&\int_0^p (f(x) + v(x) + r\sin(\omega)) \cdot (-r\cos(\omega))'\, dx \\
&\quad - \int_0^p (v(x) + r\sin(\omega)) \cdot (-r\cos(\omega))'\, dx \\
&\qquad = \int_0^p f(x) \cdot (-r\cos(\omega))'\, dx.
\end{aligned}$$

Nun gilt es nur noch den Winkel ω in Abhängigkeit von x auszudrücken.

Wie bereits unter »Aufbau« erläutert, sind die Zahnräder von ihrem Radius her so bemessen, dass sie sich genau n-Mal auf der Zahnradstange abrollen können[23]. Der Winkelhebel und die Skala auf dem Fahrarm sind wiederum so beschaffen, dass sich die Zahnradstange genau einmal komplett an dem Zahnrad vorbei bewegt, wenn der Fahrstift horizontal von dem einen Ende der Periode des Graphen zum anderen Ende bewegt wird. Das Zahnrad dreht sich also auch tatsächlich immer n-Mal in die eine und n-Mal in die andere Richtung.

Eine volle Umdrehung führt das Zahnrad also aus, wenn sich der Fahrstift bei $x = \frac{p}{n}$ befindet. Bei einer vollen Umdrehung hat ω den Wert 2π.

Eine halbe Umdrehung macht das Zahnrad, wenn sich der Fahrstift bei $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{n}$ befindet. Bei einer halben Umdrehung hat ω den Wert π.

Hieraus folgt für ω die Formel

$$\omega = n\frac{2\pi}{p}x.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}(-r\cos(\omega))' &= \left(-r\cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)\right)' \\ &= r \cdot n\frac{2\pi}{p} \cdot \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right).\end{aligned}$$

Damit hat das Integral den Wert

$$\begin{aligned}&\int_0^p f(x)\,(-r\cos(\omega))'\,dx \\ &= r \cdot n\frac{2\pi}{p} \cdot \int_0^p f(x) \cdot \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)dx \\ &= \pi r n \cdot b_n.\end{aligned}$$

Das Grundplanimeter bestimmt also tatsächlich einen Wert proportional zu b_n. Die Zahl $\pi r n$ ist eine Gerätekonstante, die allein von der Beschaffenheit des Zahnrades abhängt. Bei dem Harmonischen Analysator von Mader-Ott sind die Zahnräder so gefertigt, dass $\pi r n$ immer genau 100 mm entspricht, so dass

[23] Der Radius r_z des Zahnrades lässt sich aus dieser Bedingung $2\pi r_z = \frac{l}{n}$ heraus eindeutig auf $r_z = \frac{l}{2\pi n}$ bestimmen, wobei l die Länge der Zahnradstange ist.

einem Wert des Grundplanimeters von 0,1 cm², ein b_n von 0,01 cm entspricht[24].
Auf dieselbe Weise nur mit der Vertiefung C werden die Koeffizienten a_n bestimmt.

Bleibt zuletzt noch zu erklären, was es mit den Zwischenrädern mit der Aufschrift »:2« auf sich hat.
Bei großen Werten für n ergeben sich zwei Probleme: 1. Je öfter sich das Zahnrad auf der Zahnradstange mit fester Länge abrollen soll, d.h. je größer n ist, desto kleiner müsste das Zahnrad werden. 2. Je größer n ist, desto kleiner muss r werden, damit die Gerätekonstante $\pi r n = 100$ mm ist.
Deshalb hat man bei Werten von $n > 6$ zwei Veränderungen vorgenommen:
1. Der Wert von $\pi r n$ ist nicht auf 100 mm sondern auf 200 mm festgelegt. Daraus ergibt sich auch, dass man das Endergebnis durch zwei teilen muss und es wird erreicht, dass für r größere Werte gewählt werden können.
2. Es müssen Zwischenzahnräder dazwischen geschaltet werden. Sie sind eine Hilfskonstruktion, um die Herstellung zu kleiner Zahnräder zu vermeiden[25]. Wenn zwei Zahnräder miteinander verzahnt sind, dann nennt man die Zahl der Umdrehungen, die das kleinere Zahnrad ausführen muss, damit das größere Zahnrad eine Umdrehung durchführt, die »Übersetzung«. Aus der Mechanik wissen wir, dass die Übersetzung immer dem Quotient der Radien entspricht, wobei der kleinere Radius im Nenner steht. Mit diesem Wissen lassen sich Zahnräder in der entsprechenden Größe herstellen.

[24] Vgl. OTT Messtechnik: Der Harmonische Analysator Mader-Ott. 1931, S. 11.
[25] Hier geht es um den Radius r_z des Zahnrades. Unter Nr. 1 ging es um den Abstand r der Vertiefungen zur Zahnradmitte.

3.8.5. Der Harmonische Doppelanalysator

In der Sammlung der AG Numerik befindet sich außer dem Harmonischen Analysator auch noch ein Harmonischer Doppelanalysator mit gleicher Wirkweise, der es jedoch erlaubt, eine große Anzahl Fourier-Koeffizienten gleichzeitig zu bestimmen. Bei ihm werden mit einem Fahrarm mehrere Zahnradstangen und mehrere Zahnräder auf einmal angesteuert.

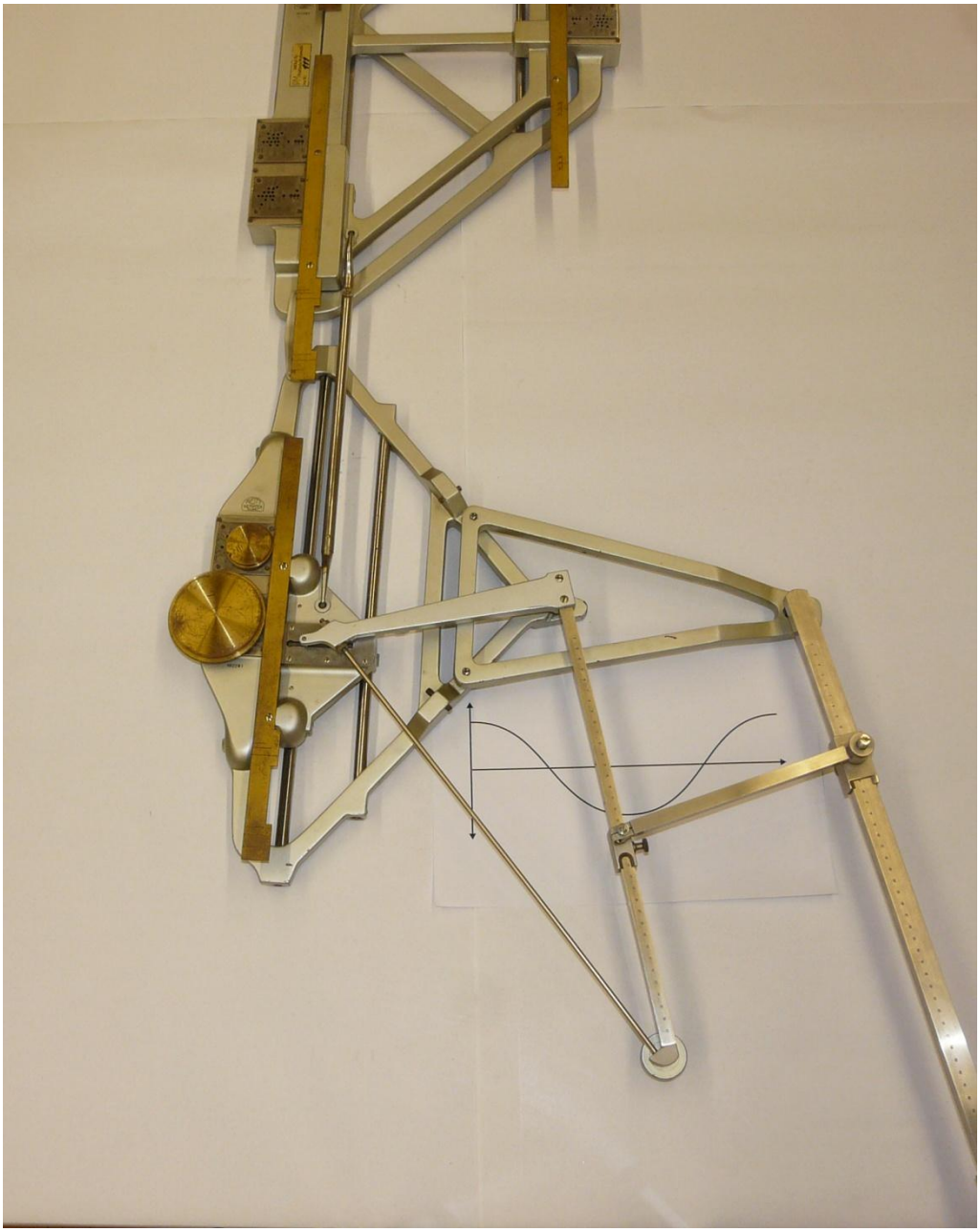

Bild 48: Harmonischer Doppelanalysator

Leider ist das Gerät nicht vollständig. Ich verweise auf das Bild von Willers (1951), S. 206, auf dem das Gerät vollständig zu sehen ist.

3.9. Integraph Adler-Ott

3.9.1. Zweck

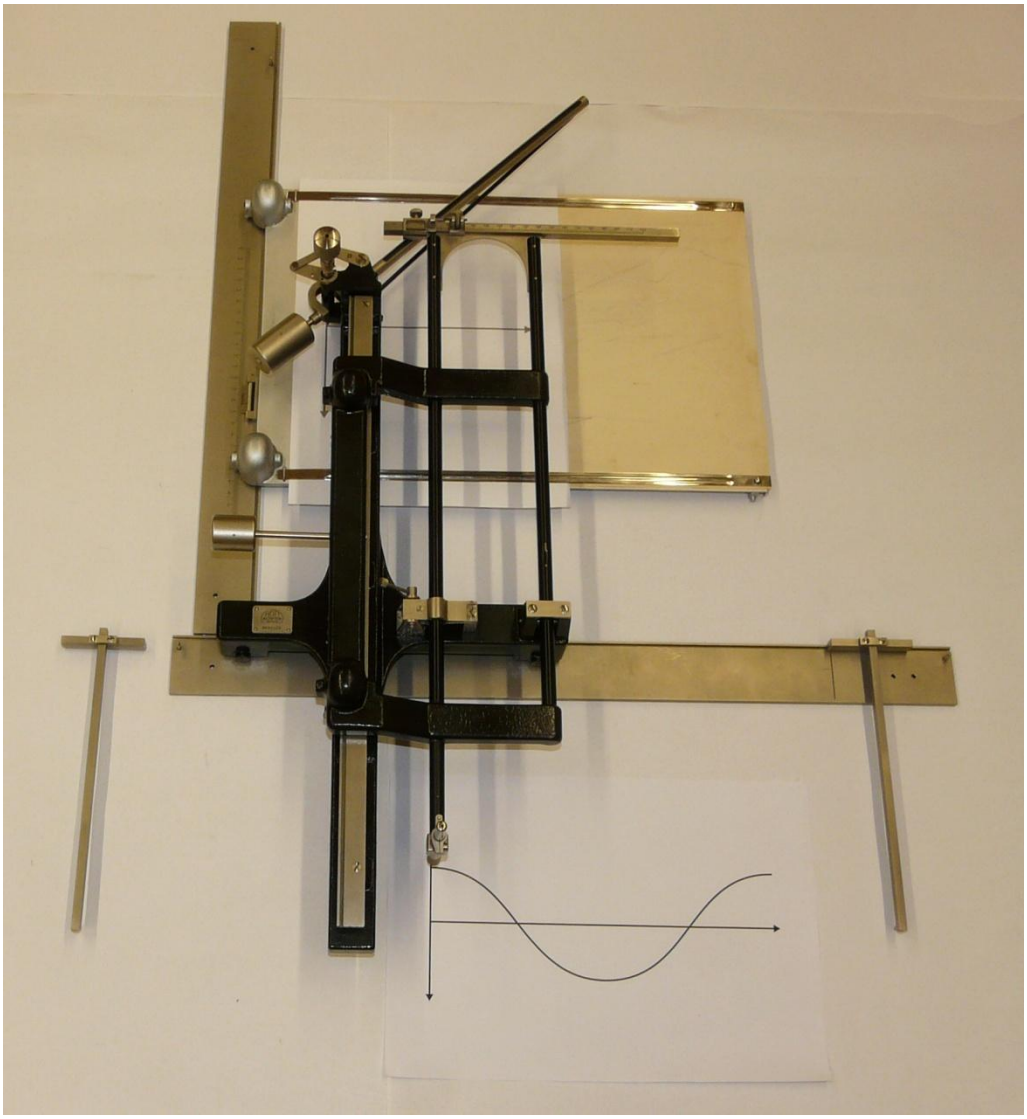

Bild 49: Schematische Darstellung des Integraphen Adler-Ott

Der Integraph von Adler-Ott kann durch Abfahren eines gegebenen, stetigen, zweidimensionalen Graphs einer Funktion f den Graph der zugehörigen Funktion F zeichnen. Die Ordinate kann dabei um einen Faktor b gestaucht werden.

Das Gerät findet zum Beispiel in Kombination mit dem Stieltjes-Planimeter Anwendung, weil man mit ihm maschinell eine Zeichnung der Stammfunktion H einer gegebenen Funktion H' erhält.

3.9.2. Aufbau[26]

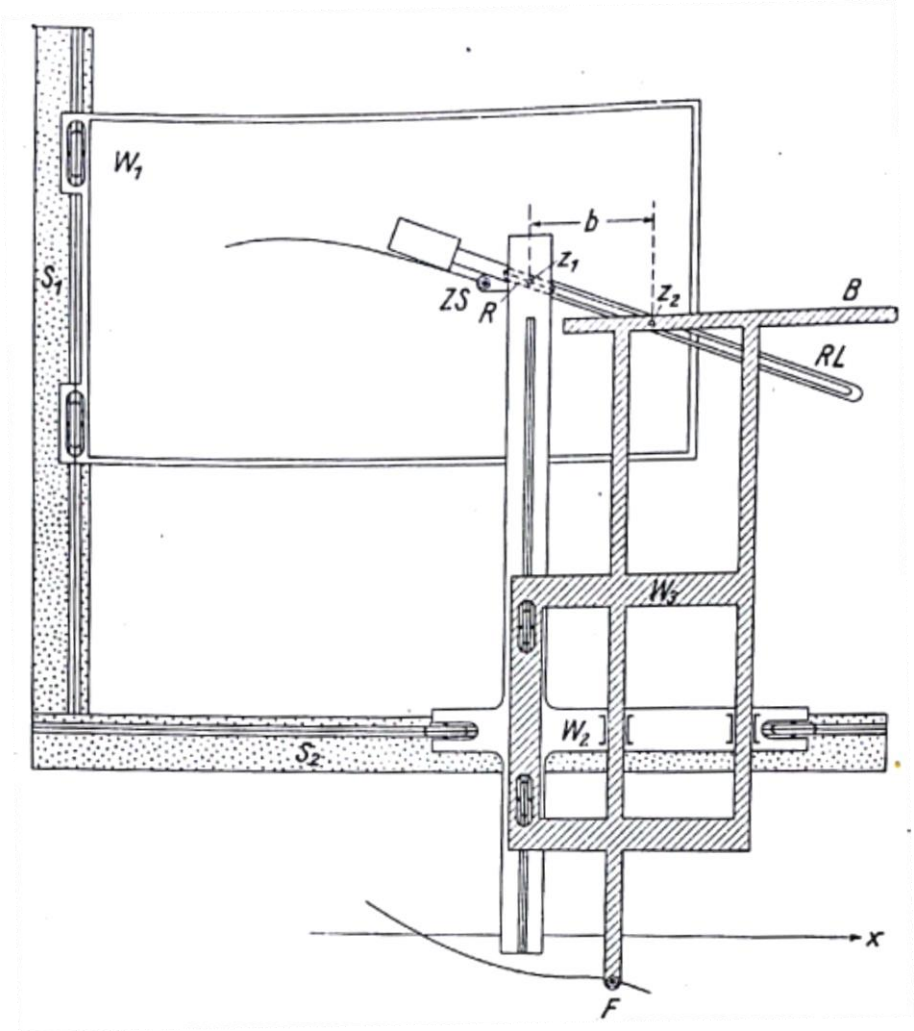

Bild 50: Schematische Zeichnung des Integraphen Adler-Ott..

Das Fundament des Integraphs bilden zwei Leitschienen S_1 und S_2, die jeweils an einem Ende senkrecht aufeinander stehen.

Auf der Schiene S_1, die vertikal verläuft, fährt ein Wagen W_1, auf welchem ein Blatt Papier eingespannt werden kann. Auf diesem Blatt wird später die Stammfunktion durch das Gerät gezeichnet.

Auf der Schiene S_2, die horizontal verläuft, fährt ein Wagen W_2. Auf dem Wagen W_2 läuft wiederum horizontal ein Wagen W_3. Oben an den Wagen W_2 und W_3 befestigt ist ein so genanntes Richtungslineal. Das Richtungslineal kann man sich als Arm vorstellen, der fest am oberen Ende des Wagens W_2 befestigt ist und sich um diesen Punkt drehen kann. Das andere Ende des Richtungsline-

[26] Ausführungen zum Integraphen findet man bei Meyer zur Cappelen (1949), S. 234, Willers (1951), S. 239ff. und Fischer (2011), S. 93ff.

als ist am Wagen W_3 befestigt, jedoch nicht starr. Der Befestigungspunkt am Wagen W_3 läuft auf dem Richtungslineal. Das hat zur Folge, dass sich durch horizontales Verschieben des Wagens W_3 der Winkel des Richtungslineals ändert: Befindet sich der Wagen W_3 auf einer bestimmten Höhe, sodass die beiden Befestigungspunkte des Richtungslineals auf den Wagen horizontal auf einer Linie liegen, so hat das Richtungslineal gegen die Horizontale den Winkel 0°. Liegt der Wagen W_3 höher, hat das Richtungslineal einen positiven Winkel, liegt er tiefer, einen negativen Winkel. Der Abstand der beiden Befestigungspunkte des Richtungslineals ist einstellbar und wir nennen ihn b.

Unter dem Befestigungspunkt des Richtungslineals, der sich auf dem Wagen W_2 befindet – also dem, um den sich das Lineal dreht – befindet sich ein so genanntes Schneidenrad, das durch das Gewicht der Maschine auf den Wagen W_1 gedrückt wird – auf dem die Stammfunktion gezeichnet wird – und sich auf diesem frei bewegen kann. Ein Schneidenrad ist ein Rad mit einer relativ scharfen Schneide, dass dadurch in nicht in Rollachsenrichtung über das Blatt gezogen werden kann, weil es nicht »gleiten«, sondern nur rollen kann (vgl. Bild 51). Das Rad ist so an das Richtungslineal angebracht, dass es sich mit ihm drehen kann und immer in dieselbe Richtung zeigt. Schneidenrad und Richtungslineal haben also auch immer denselben Winkel gegen die Horizontale.

Welche Funktion hat das Schneidenrad nun? Es bewegt den Wagen W_1. Verschiebt man das Gebilde aus Wagen W_2 und W_3 nach rechts oder links, so rollt das Schneidenrad auf dem Wagen W_1 in einem bestimmten Winkel. Da das Schneidenrad in der Regel nicht nur horizontal rollt, sondern schräg, hat seine Bewegung auch eine vertikale Komponente. Durch die Reibung übt das Schneidenrad also in der Regel eine vertikale Kraft auf den Wagen W_1 aus, welcher sich daraufhin in seiner Schiene bewegt.

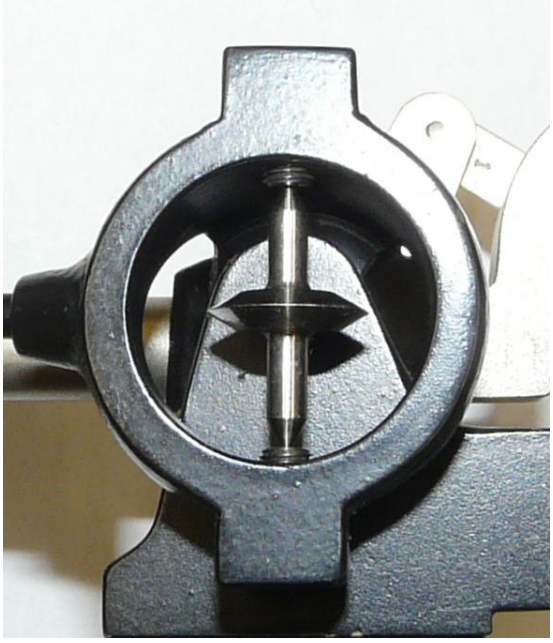

Bild 51: Schneidenrad.

Insgesamt fehlen nur noch zwei

Bauteile des Integraphen, der Fahrstift, mit dem der Graph der Funktion abgefahren wird und der Zeichenstift, mit dem die Stammfunktion gezeichnet wird. Der Zeichenstift ist auf dem Wagen W_2 auf der Höhe des Befestigungspunktes des Richtungslineals angebracht, nur weiter links als das Richtungslineal. Er ist mit ZS bezeichnet. Der Fahrstift ist ganz unten auf dem Wagen W_3 angebracht und mit F bezeichnet.

3.9.3. Anwendung

Vor dem Einsatz des Gerätes baut man die beiden Schienen S_1 und S_2, sowie den Wagen W_1 auf und spannt auf dem Wagen W_1 ein weißes Blatt Papier ein. Anschließend setzt man unter die Schiene S_2 die Zeichnung der Funktion, zu der man die Stammfunktion zeichnen will und richtet sie mithilfe der beiden Distanzstäbe (Vgl. Bild 49 ganz rechts und links) so aus, das die Spitze der Stäbe auf der x-Achse liegen, wenn das andere Ende der Distanzstäbe in der Schiene eingesetzt ist. Das Blatt sollte zwischen den beiden Markierungen auf der Schiene ausgerichtet werden. Dann setzt man die Wagen W_2 und W_3 in die Schiene ein und legt das obere Ende mit dem Schneidenrad auf den Wagen W_1. Man richtet den Wagen W_3 auf dem Wagen W_2 so aus, dass sich die beiden Befestigungspunkte des Richtungslineals und damit auch das Richtungslineal selbst auf einer horizontalen Line befinden. Ggf. muss man einen kleinen Hebel lösen, der den Wagen W_3 auf dem Wagen W_2 fixiert. An dem Befestigungspunkt des Richtungslineals auf dem Wagen W_3 kann der Abstand b dieses Punktes zu dem Befestigungspunkt auf dem Wagen W_2 eingestellt werden. Dieser Abstand bestimmt, wie sehr der Graph der Stammfunktion gestreckt wird. Man kann ihn größer einstellen, wenn man eine Stammfunktion mit sehr großen Ordinaten-Werten erwartet.

Nun muss nur noch der Zeichenstift und der Fahrstift in das Gerät eingesetzt und das Gerät in die richtige Position gebracht werden. Drückt man das untere Ende des Wagens W_2 nach unten, setzt der obere Teil zusammen mit dem Zeichenstift nicht mehr auf dem Blatt auf und man kann die Wagen W_1 bis W_3 so ausrichten, dass der Fahrstift auf dem Graphen liegt und der Zeichenstift auf der linken Seite des Zeichenblatts. Nun kann die Kurve abgefahren werden. Anschließend kann man die Zeichnung der Stammfunktion entnehmen.

3.9.4. Wirkweise

Zunächst wird betrachtet, welche Funktion das Gerät zeichnet, wenn man den Graph einer konstanten Funktion $y = f(x) = c$ abfährt.

Wie unter Anwendung beschrieben, richtet man den Wagen W_3 auf dem Wagen W_2 zunächst so aus, dass die beiden Befestigungspunkte des Einstellwinkels auf einer horizontalen Linie liegen, und legt die Zeichnung des Graphs von f so unter den Fahrstift F, dass sich unter dem Fahrstift direkt die x-Achse befindet. Nun verschiebt man den Wagen W_3 so, dass der Fahrstift auf dem Graph der konstanten Funktion liegt. Da der Graph einen Höhenabstand von $|f(x)|$ zur x-Achse hat, wird der Wagen genau um $f(x)$ nach oben bzw. unten geschoben.

Die beiden Befestigungspunkte des Richtungslineals haben also einen Höhenabstand von $f(x)$ und einen horizontalen Abstand von b. Damit ist der Winkel des Lineals und des Schneidenrades gegen die Horizontale eindeutig festgelegt. Der Zeichenstift zeichnet auf dem Wagen W_1 eine Gerade mit der Steigung $\frac{f(x)}{b}$. Wenn man den Wagen W_2 also um b nach rechts verschiebt, so verschiebt das Schneidenrad den Wagen W_1 um $f(x)$ nach unten. Die Inetragtionsbasis b wiederum lässt sich wie unter Aufbau beschrieben verstellen.

Was geschieht beim Abfahren von zwei konstanten Funktionen, die durch eine Sprungstelle verbunden sind? Auch in diesem Fall wird die Stammfunktion gezeichnet. Wenn der Fahrstift an der Sprungstelle senkrecht nach oben oder unten bewegt wird, verändert der Zeichenstift seine Position nicht. Nur das Schneidenrad verändert seinen Winkel. Nach der Stammfunktion zu der ersten konstanten Funktion wird also stetig die Stammfunktion zu der zweiten konstanten Funktion weitergezeichnet.

Nun lässt sich aber jede integrierbare Funktion beliebig genau mit konstanten Treppenfunktionen approximieren. Auf diese Weise wird auch die gezeichnete Stammfunktion die gesuchte Stammfunktion immer weiter approximieren. Im Grenzwert dieses Prozesses fährt man mit dem Fahrstift quasi eine beliebige integrierbare Funktion ab und das Gerät zeichnet die zugehörige Stammfunktion.

q.e.d.

4. Historisches zu den Maschinen und der TH Darmstadt

Die Maschinen, die in dem letzten Kapitel vorgestellt wurden, stammen alle aus der Produktion der Firma A. Ott und sind zum Teil durch eine Kooperation der Firma A. Ott mit der TH Darmstadt – heute TU Darmstadt – entstanden. Die Firma A. Ott wurde 1873 in Kempten von Albert Ott als »Mathematisch-Mechanisches Institut« gegründet. Sie stellte bis in das Jahr 1990 mathematische Instrumente her und gewann Anfang des 20. Jahrhunderts internationales Ansehen für die Entwicklung und Herstellung von Integrierinstrumenten, die es bis dahin entweder noch gar nicht oder nicht in den von Ott dafür gefundenen neuen Formen bzw. Ausführungen gab[27]. Auch Pantographen und Kartiergeräte wurden durch Ott verbessert. Ein weiteres Geschäftsgebiet war von Anfang an die Entwicklung von Messtechnik im Bereich der Hydrometrie. In diesem Gebiet ist die Firma auch heute noch tätig.

Prof. Dr. Joachim Fischer, Geschäftsführer der Ernst von Siemens Kunststiftung, hat sich eingehend mit der Geschichte der mathematischen Instrumente aus der Firma A. Ott und insbesondere auch mit der Kooperation der Firma A. Ott mit der TH Darmstadt beschäftigt. Dieses Kapitel basiert auf zwei Beiträgen von ihm, aus dem Jahrbuch »125 Jahre Ott. Eine Reise durch Zeit und Technik«[28] und der Festschrift »Rechnende Maschinen im Wandel: Mathematik, Technik, Gesellschaft«[29]. Ich beschränke mich darauf die Ausführungen von Fischer zusammen zu fassen und komprimiert die wichtigen historischen Quellen und Personen, sowie die Beziehung der Firma A. Ott zu der TU Darmstadt im Zusammenhang mit den Geräten zu beschreiben.

[27] Vgl. Fischer (2011), S. 33.
[28] Fischer, Joachim: Zur Geschichte der Mathematischen Instrumente aus der Herstellung der Firma A. Ott, Kempten. In: OTT Messtechnik: 125 Jahre OTT. Eine Reise durch Technik und Zeit. Kempten: 1998, S. 159-183.
[29] Fischer (2011), S. 33-110.

Fischer geht davon aus, dass ein wesentlicher Teil der Errungenschaften in der Planimeter-Entwicklung der Firma A. Ott auf die Beziehung zwischen Dr.-Ing. Ludwig Albert Ott (1883-1946) und Prof. Dr. rer. techn. Alwin Oswald Walther (1898-1967) von der TH Darmstadt zurück zu führen ist. Ludwig Ott war über die Jahre hinweg der »mathematische Kopf« der von dem früh verstorbenen Albert Ott (1847-1895) gegründeten Firma, während Ludwigs älterer Bruder Hermann Albert Ott (1881-1964) Konstruktion und Produktion der Instrumente verantwortete[30].
Alwin Walther hatte einen Lehrstuhl für Mathematik an der TH Darmstadt inne und entwickelte diesen weiter, zunächst zu einem »Lehrstuhl für praktische Mathematik«, dann zu einem »Institut für Praktische Mathematik« (IPM). Nach der Emeritierung und dem ein Vierteljahr später folgenden Tod Walthers, wurde das Institut aufgelöst[31]. Alle Geräte, die in dieser Arbeit beschrieben werden, stammen aus dem Inventar des IPM und tragen Inventarnummern des Instituts.
Eine weitere bedeutende Persönlichkeiten im Rahmen dieser Kooperation war Heinz Adler, ein Schüler Alwin Walthers, der in der Zeit der Kooperation mit Ott gerade sein Diplom in Physik ablegte und mit Walther zusammenarbeitete[32].

Weitere wichtige historische Quellen zu der Kooperation sind der erhaltene *Briefwechsel* zwischen Ludwig Ott und Alwin Walther von 1928-1945, sowie das *Firmenmuseum* der Firma A. Ott[33].

Zu den Maschinen, die aus der Kooperation hervorgegangen sind:
Das **Grund- und Quadrat-Linearplanimeter**[34] ist von *Heinz Adler* entwickelt worden und trug zu Beginn auch den Beinamen »Adler-Ott«. Die Entwicklung des Geräts ging zurück auf eine Fragestellung der Familie Siemens an die Firma A. Ott, ob es möglich sei, das Volumen einer Glühbirne durch Abfahren des Meridians zu bestimmen (als Rotationsvolumen). Die Frage wurde an

[30] Fischer (2011), S. 33.
[31] Vgl. Fischer (2011), S. 33f.
[32] Vgl. Fischer (2011), S. 36ff.
[33] Vgl. Fischer (2011), S. 34f.
[34] Vgl. das deutlich ausführlichere Kapitel in Fischer (2011), S. 38ff. In diesem Abschnitt fasse ich das Kapitel von Fischer nur zusammen.

Alwin Walther weiter gegeben, welcher diese wiederum, nach eigenen Überlegungen, an Heinz Adler weiter gab[35]. Es ging nicht um die Erfindung eines Quadratplanimeters (dieses wurde z.B. in der Ausführung von Jakob Amsler schon über 1500 Mal produziert[36]), sondern um das Finden einer geeigneteren und einfacheren Konstruktionsform.
Adlers Verdienst besteht darin, den bereits bekannten Zusammenhang zwischen Quadrierung und Winkelverdopplung, $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$, mit dem Gedanken des gleichschenkligen Dreiecks zu einer neuen und einfacheren Form des Quadratplanimeters zu verbinden[37]. Die Idee das Grund- und Quadratplanimeter zu einem Gerät zu kombinieren stammt offenbar von Ludwig Ott[38]. Adler entwickelte auf Grundlage der Idee der Winkelverdopplung später auch noch Wurzelplanimeter und Kubikplanimeter mittels Winkelhalbierung und Winkelverdreifachung[39].
Es folgte die Einsparung des Hilfsarmes, der die Kurve y^2 abfährt und den wir auch in Kapitel 3.3.4.2 kurz zur Erklärung herangezogen haben, und einige Genauigkeitsuntersuchungen von Kurt Wemheuer, einem Studenten von Alwin Walther. Im Zuge der Genauigkeitsuntersuchungen regte Wemheuer an, das Gerät so aufzustellen, dass es oberhalb der Zeichnung steht und nach unten ausgerichtet ist, damit man mit dem Arm, der den Fahrstift führt, nicht über die Leitschiene hinweg greifen muss[40]. Außerdem regte er Distanzstäbe nach dem Vorbild von Jakob Amsler an. Diese Anregungen wurden von Ott umgesetzt.

1930 entwickelte *Heinz Adler* auf Wunsch von Ludwig Ott ein so genanntes **korrigiertes Radialwurzelplanimeter** also ein Wurzel-Planimeter, das in Polarkoordinaten gezeichnete Graphen verarbeiten und dabei auch noch bestimmte Abweichungen vertragen kann[41]. Da dieses Gerät nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, verweise ich für weitere Informationen auf die Ausführungen von Fischer.

[35] Vgl. Fischer (2011), S. 38f.
[36] Vgl. Fischer (2011), S. 39.
[37] Vgl. Fischer (2011), S. 39.
[38] Vgl. Fischer (2011), S. 51.
[39] Vgl. Fischer (2011), S. 52ff und 69ff.
[40] Vgl. Fischer (2011), S. 45ff.
[41] Vgl. Fischer (2011), S. 86f.

Festzuhalten ist jedoch, dass Heinz Adler bei der Entwicklung des korrigierten Radialwurzelplanimeters mit der Technik der Kurvensteuerung in Kontakt gekommen ist, weiter mit dieser Technik experimentiert hat und sie an Ott herangetragen hat[42]. Mir ist nicht bekannt, ob diese Beschäftigung und Korrespondenz schlussendlich zu der Entwicklung des **Potenzplanimeters mit Kurvensteuerung** geführt hat, es ist für mich aber denkbar, dass es ein wichtiger Baustein für die Entwicklung war. In den Texten von Fischer konnte ich nichts über einen Bezug zu der TH Darmstadt bei der Entwicklung des Geräts finden[43].

Der **Integraph Adler-Ott** wurde ebenfalls von *Heinz Adler* entwickelt. Auch hier ging es nicht um die Erfindung eines Integraphen. Alwin Walther hatte selbst einen Integraphen in der Bauart von Gottlieb Coradi an seinem Lehrstuhl. Der Integraph von Coradi war damals der einzige verbreitete Integraph[44]. Fischer vermutet in der Unzufriedenheit Walthers mit dem Integraphen von Coradi den Anlass, Heinz Adler damit zu beauftragen, eine geeignetere Konstruktionsform zu suchen[45]. Auch der Integraph von Coradi enthielt schon als zentrale Funktion ein Schneidenrad, wie es auch später in der Konstruktion von Adler beibehalten ist. Es ist anzunehmen, dass Adler das Schneidenrad als zentrale Funktion beibehielt und davon ausgehend nach einer einfacheren Konstruktion suchte.
Nachdem die Firma A. Ott sich aufgrund der finanziellen Lage zunächst nicht dem Gerät widmen konnte und nach späterem Experimentieren mit verschiedenen Materialien und Formen, bot Ott das Gerät 1937 schließlich offiziell im firmeneigenen Katalog an. Dort wurde das Gerät mit einem kurzen einleitungstext präsentiert, dessen erster Satz war:

> »Der Integraph Adler-Ott beruht auf dem allgemeinen Konstruktionsprinzip der Integraphen von Abdank-Abakanowicz und ist im besonderen eine Vervollkommnung jenes Baumusters dieses Erfinders, das derselbe gemeinsam mit Herrn Pollard, Direktor des »Ecole du génie maritime« ausgearbeitet hat.«[46]

[42] Vgl. Fischer (2011), S. 70ff.
[43] Die einzige Erwähnung, die ich gefunden habe ist zu finden unter Fischer (1998), S. 170.
[44] Vgl. Fischer (2011), S. 97f.
[45] Vgl. Fischer (2011), S. 93,97.
[46] Zitiert nach Fischer (2011), S. 104.

Bruno Abdank-Abakanowicz hatte in der Tat 1882 ein Modell präsentiert, bei dem eine Zeichenfläche durch ein Schneidenrad vertikal verschoben wurde, während sich das Schneidenrad nur auf einer Gerade bewegte[47]. Fischer geht jedoch davon aus, dass Adler von dieser Arbeit keine Kenntnis hatte und unabhängig von Abdank-Abakanowicz denselben Mechanismus erfand[48].
Walther veröffentlichte 1936 einen Artikel »Mathematische Geräte zum Integrieren«, in dem er den Integraphen erstmals einer breiteren Öffentlichkeit vorstellte[49].
Fischer schätzt, dass zwischen 1942-1963 ca. 160 Integraphen Adler-Ott verkauft wurden[50]. 1972 wurde die Herstellung eingestellt[51]. Das letzte Exemplar wurde vermutlich 1975 verkauft.

Zu erwähnen sind zum Schluss noch zwei weitere Geräte, die in enger Zusammenarbeit mit dem Institut für Praktische Mathematik an der TH Darmstadt entwickelt wurden: Der **Differentio-Integraph** und die **Differentialgleichungsmaschine**. Fischer bezeichnet sie als »Höhepunkte der elektromechanischen Analogtechnik«[52]. Fischer schreibt weiter: »Mit diesen Maschinen konnten nicht nur einfache Integrale berechnet und ausgewertet, sondern große Klassen von Differentialgleichungen gelöst werden – mit zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten in den Natur- und Ingenieurwissenschaften«[53]. Diese Geräte sind jedoch auch bei Fischer nicht näher beschrieben und zudem nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Insgesamt ist aus diesen Beispielen ersichtlich, dass das Institut für Praktische Mathematik an der TH Darmstadt eine große Rolle bei der Entwicklung einiger wichtiger mathematischer Messinstrumente spielte und dass ohne die Beteiligung der TH Darmstadt viele der vorliegenden Geräte nicht entstanden wären.

[47] Vgl. Fischer (2011), S. 94ff.
[48] Vgl. Fischer (2011), S. 96,100f.
[49] Vgl. Fischer (2011), S. 104.
[50] Vgl. Fischer (2011), S. 106.
[51] Vgl. Fischer (2011), S. 106.
[52] Fischer (1998), S. 170.
[53] Fischer (1998), S. 170.

5. Abbildungsverzeichnis

Bild 1-2: Eigene.

Bild 3-8: Eigene, auf Grundlage von Willers (1951), S. 164.

Bild 9-10: Eigene.

Bild 11-17: Eigene auf Grundlage von Willers (1951), S. 164.

Bild 18: Chiswick Chap, CC BY-SA 3.0, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Cavalieri%27s_Principle_in_Coins.JPG

Bild 19-26: Eigene auf Grundlage von Willers (1951), S. 164.

Bild 27: Eigenes auf Grundlage von Fischer (2011), S. 40.

Bild 28: Eigenes von Willers (1951), S. 164.

Bild 29: Willers (1951), S. 182.

Bild 30: Eigenes.

Bild 31-32: Eigene, auf Grundlage von Willers (1951), S. 164.

Bild 33: Eigenes.

Bild 34-36: Willers (1951), S. 167, bearbeitet.

Bild 37-41: Eigene.

Bild 42: Willers (1951), S. 230, bearbeitet.

Bild 43: OTT Messtechnik (1931), S. 9, bearbeitet.

Bild 44: Willers (1951), S. 230, bearbeitet.

Bild 45: Eigenes.

Bild 46: OTT Messtechnik (1931), S. 4, bearbeitet.

Bild 47: OTT Messtechnik (1931), S. 10.

Bild 48-49: Eigene.

Bild 50: Willers (1951), S. 240.

Bild 51: Eigenes.

6. Literaturverzeichnis

Blümich, Wolf-G.: Das Planimeter. Wie funktioniert ein Polarplanimeter? http://bluemich.net/rechner/rmplanimeter.htm (Letzter Zugriff: 15.12.2013)

Fischer, Joachim: Zur Geschichte der Mathematischen Instrumente aus der Herstellung der Firma A. Ott, Kempten. In: OTT Messtechnik: 125 Jahre OTT. Eine Reise durch Technik und Zeit. Kempten: 1998.

Fischer, Joachim: Zur Rolle von Heinz Adler zwischen Ludwig Albert Ott und Alwin Oswald Walther. In: Hashagen, Ulf; Hellige, Hand Dieter (Hrsg.): Rechnende Maschinen im Wandel: Mathematik, Technik, Gesellschaft. Festschrift für Hartmut Petzhold zum 75. Geburtstag. Preprint 3. Deutsches Museum, 2011. http://www.deutsches-museum.de/fileadmin/Content/TRASH/PetzoldGesamt_2.pdf (Letzter Zugriff: 23.12.2013).

Kunkel, Paul: The Planimeter. http://whistleralley.com/planimeter/planimeter.htm (Letzter Zugriff: 15.12.2013).

Meyer zur Cappelen, W.: Mathematische Instrumente. 3. Auflage. Leipzig: Geest & Portig K.-G., 1949 (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe B, Band 1)

OTT Messtechnik: Der Harmonische Analysator Mader-Ott. 1931.

Willers, FR. A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin: Akademie Verlag, 1951

7. Anhang

- Video zu dem Harmonischen Analysator
- Bilder zu den verschiedenen Geräten

Versicherung, die Arbeit selbstständig verfasst zu haben

Ich versichere hiermit, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwandt und die Stellen, die anderen benutzten Druck- und digitalisierten Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, mit Quellenangaben kenntlich gemacht habe.